

Digitalna obrada signala

Obrada digitalnih signala

Numerička obrada digitalnih signala

Numerička obrada informacija sadržanih u nizu brojeva



Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

Digitalna obrada signala - 2022/23

1

1

MATEMATIKA – najčešće korišćeno

Kompleksni brojevi

$$z = x + jy = Ae^{j\varphi}$$

$$A = \sqrt{x^2 + y^2}$$

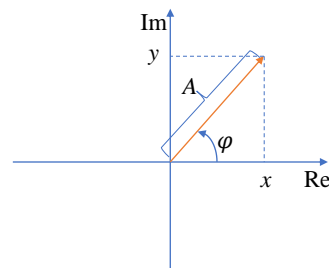
$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$Ae^{j\varphi} = A(\cos \varphi + j\sin \varphi)$$

$$x = \operatorname{Re}(Ae^{j\varphi}) = A \cos \varphi$$

$$y = \operatorname{Im}(Ae^{j\varphi}) = A \sin \varphi$$

Kompleksan broj - Vektor u kompleksnoj ravni



Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

Digitalna obrada signala - 2022/23

2

2

$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

Realan signal = zbir dva kompleksna signala

$$x(t) = \frac{A}{2} e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} + \frac{A}{2} e^{-j(\omega_0 t + \varphi_0)} = A \frac{e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi_0)}}{2}$$


$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$

Jedan kompleksan signal koji se u kompleksnoj ravni obrće u smeru suprotnom od kazaljke na satu učestanošću ω_0

Jedan kompleksan signal koji se u kompleksnoj ravni obrće u smeru kazaljke na satu učestanošću ω_0

Jedan kompleksan signal koji se u kompleksnoj ravni obrće u smeru suprotnom od kazaljke na satu učestanošću $-\omega_0$

Pojava - Negativne učestanosti



Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

Digitalna obrada signala - 2022/23

3


3

Realan signal = zbir dva kompleksna signala

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A \frac{e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi_0)}}{2}$$

$$y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A \frac{e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} - e^{-j(\omega_0 t + \varphi_0)}}{2j}$$

$$y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A \frac{e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} - e^{-j(\omega_0 t + \varphi_0)}}{2j} \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{e^{-j\frac{\pi}{2}}} = A \frac{e^{j(\omega_0 t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2})} - e^{j\pi} e^{-j(\omega_0 t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2})}}{2}$$

$$y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A \frac{e^{j(\omega_0 t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2})} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2})}}{2} = A \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)$$


Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

Digitalna obrada signala - 2022/23

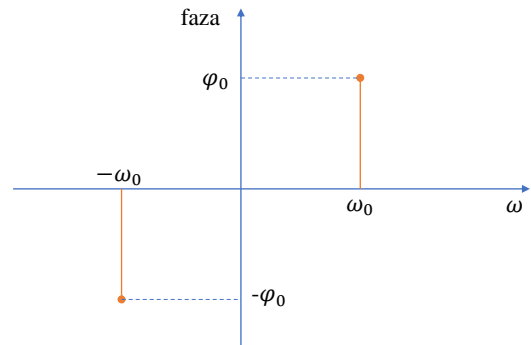
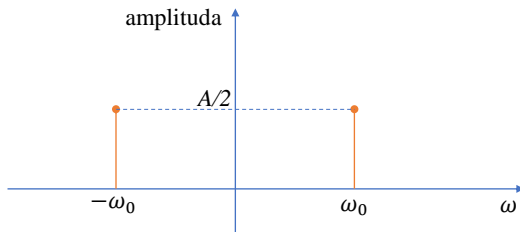
4

4

Grafička predstava

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$x(t) = \frac{Ae^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} + Ae^{-j(\omega_0 t + \varphi_0)}}{2}$$



5

Zašto je zgodno raditi i sa negativnim učestanostima

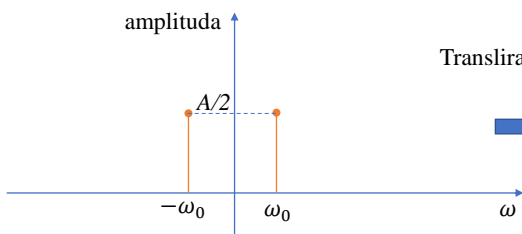
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

često

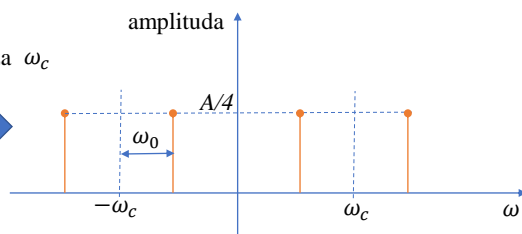
$$x(t) \cdot \cos \omega_c t = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cdot \cos \omega_c t = \frac{A}{2} (\cos((\omega_c - \omega_0)t - \varphi_0) + \cos((\omega_c + \omega_0)t + \varphi_0))$$

$$x(t) \cdot \cos \omega_c t = A \frac{e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi_0)}}{2} \cdot \frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2}$$

$$x(t) \cdot \cos \omega_c t = \frac{A}{4} (e^{j((\omega_c + \omega_0)t + \varphi_0)} + e^{j((\omega_c - \omega_0)t - \varphi_0)} + e^{-j((\omega_c - \omega_0)t + \varphi_0)} + e^{-j((\omega_c + \omega_0)t + \varphi_0)})$$



Transliranje za ω_c



Početni signal - grafička predstava

Proizvod signala - grafička predstava



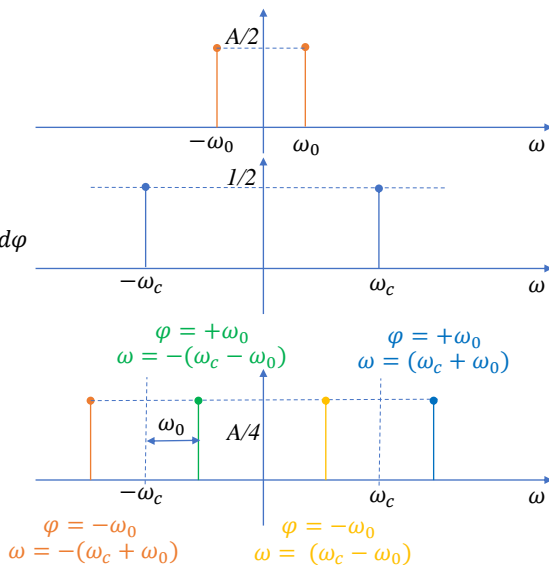
6

Proizvod u vremenskom – konvolucija u frekventnom
Učili ste to, ponovićemo, učićemo

konvolucija

$$Y(\omega) = X(\omega) * C(\omega)$$

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\varphi) \cdot C(\omega - \varphi) d\varphi$$



Konvolucija ova dva signala

Rezultat



Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

Digitalna obrada signala - 2022/23

7

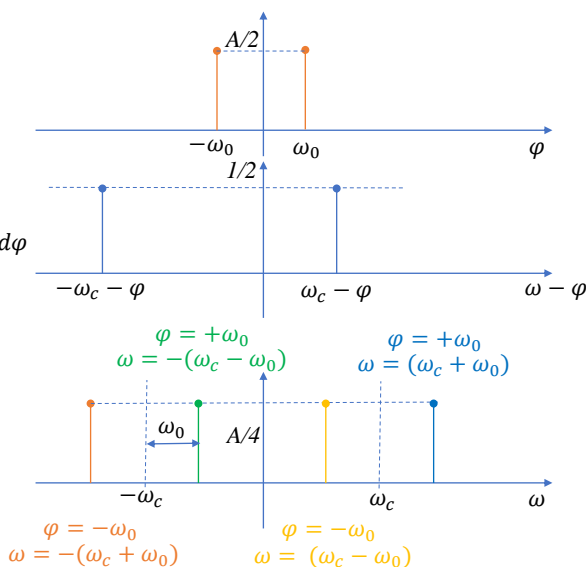
7

Proizvod u vremenskom – konvolucija u frekventnom
Učili ste to, ponovićemo, učićemo

konvolucija

$$Y(\omega) = X(\omega) * C(\omega)$$

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\varphi) \cdot C(\omega - \varphi) d\varphi$$



Menjamo φ

Samo kada se poklope
za neko ω
postoji proizvod različit od nule

A to je moguće samo za
ove četiri kombinacije

Znači samo kada je
 $\varphi = \pm \omega_0$
i
 $\omega = \pm \omega_c \pm \omega_0$



Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

Digitalna obrada signala - 2022/23

8

8

MATEMATIKA – najčešće korišćeno

Redovi i sumiranje redova

$$\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a \sum_{k=0}^{n-1} r^k = a \frac{1-r^n}{1-r}$$

r realno i < 1

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1-r^{\infty}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$$

r kompleksno = $e^{j\varphi}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1-e^{jn\varphi}}{1-e^{j\varphi}}$$

često

$$\frac{1-e^{jn\varphi}}{1-e^{j\varphi}} = \frac{e^{j\frac{n\varphi}{2}} \cdot e^{-j\frac{n\varphi}{2}} - e^{j\frac{n\varphi}{2}} \cdot e^{-j\frac{n\varphi}{2}}}{e^{j\frac{\varphi}{2}} \cdot e^{-j\frac{\varphi}{2}} - e^{-j\frac{\varphi}{2}} \cdot e^{j\frac{\varphi}{2}}} = e^{j\frac{n-1}{2}\varphi} \frac{\sin\left(n\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

Da bi se lakše videlo šta se dešava kada se menja φ



MATEMATIKA – „trikovi“

r kompleksno = $ae^{j\varphi}$
 $a < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1-a^{\infty}e^{j\infty\varphi}}{1-ae^{j\varphi}} \quad ????$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1-ae^{j\varphi}}{1-ae^{j\varphi}} \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} r^k - \sum_{k=0}^{\infty} r^{k+1}}{1-ae^{j\varphi}} = \frac{r^0}{1-ae^{j\varphi}} = \frac{1}{1-ae^{j\varphi}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k - \sum_{k=0}^{\infty} r^{k+1} = (r^0 + r^1 + r^2 + r^3 \dots) - (r^1 + r^2 + r^3 + \dots) = r^0$$

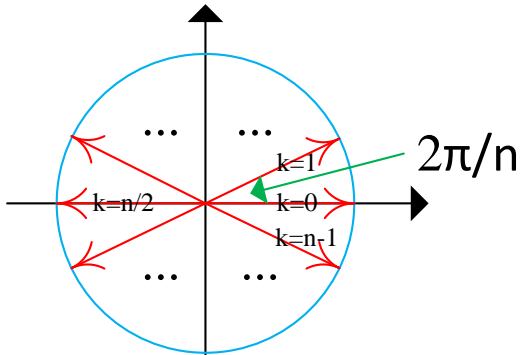
Zašto to ovde „sme“, a nije smelo ako je r realno i veće od 1? $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = ?$

Zašto sme ako je r realno i manje od 1? $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$

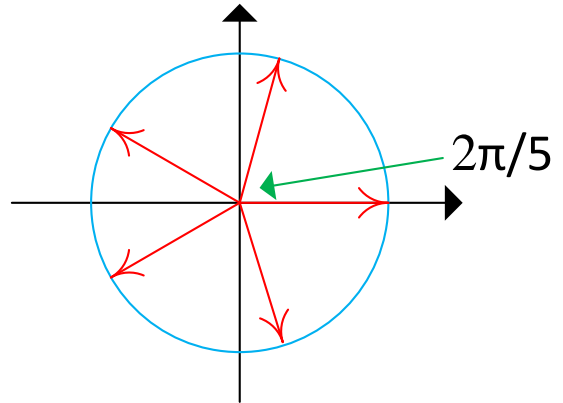
Odgovor daju i Furijovi redovi. Razvoj funkcije $\frac{1}{1-z}$ daje $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ uz uslov $|z| < 1$.



$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{jk\frac{2\pi}{n}} = ?$$



Isto se dobija i ako je n neparno.
Primer $n=5$



Radi lakšeg crtanja, n parno.

$$= 0$$

Ovakva kompleksna predstava može da nam pomogne u mnogim situacijama.



$$\sqrt[n]{1} = ? \text{ rešenja jednačine } x^n - 1 = 0$$

$$1 = e^{jk2\pi} \quad k \text{ ceo broj}$$

$$\sqrt[n]{1} = (e^{jk2\pi})^{\frac{1}{n}} = e^{jk\frac{2\pi}{n}}$$

Vektori po jediničnom krugu ravnomerno raspoređeni

$$\sqrt[n]{-1} = ? \text{ rešenja jednačine } x^n + 1 = 0$$

$$-1 = e^{j(2k+1)\pi} \quad k \text{ ceo broj}$$

$$\sqrt[n]{-1} = (e^{j(2k+1)\pi})^{\frac{1}{n}} = e^{j(2k+1)\frac{\pi}{n}}$$

Vektori po jediničnom krugu ravnomerno raspoređeni sa početnim faznim stavom $\frac{\pi}{n}$

$$\sqrt[n]{j} = ?$$

$$\sqrt[n]{-j} = ?$$

$$\sqrt[n]{a + jb} = ?$$



Primer obrade signala u vremenskom domenu



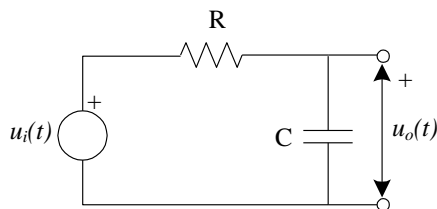
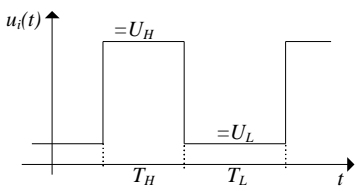
Analiza u vremenskom domenu kao što smo na primer radili u digitalnoj elektronici.

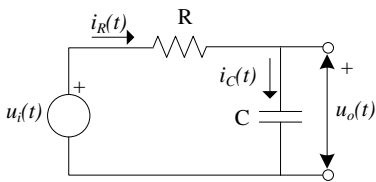
Da vidimo mane, ograničenja, gde je pogodno a gde baš i ne.

I zašto nam u drugim situacijama treba i drugačiji pristup?

Da li smo mogli i drugačije?

Problem: odziv realnog kola sa jednim akumulativnim elementom u ustaljenom režimu, na periodičnu povorku impulsa.





1. $u_i(t) - u_R(t) - u_C(t) = 0$
 $i_R(t) = i_C(t)$

$$u_R(t) + u_C(t) = u_i(t)$$

$$Ri_R(t) + u_C(t) = u_i(t)$$

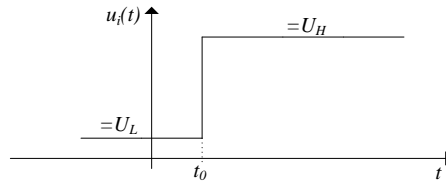
$$Ri_C(t) + u_C(t) = u_i(t)$$

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t)$$

I sada smo već u problemu kako da opišemo ulazni signal a da nam rešavanje diferencijalne jednačine bude jednostavno

Katedra za elektroniku
 prof dr Lazar Saranovac

Da olakšamo, radimo postepeno pa je drugi korak - pobuda oblika Hejvisajdove funkcije. Olakšavamo rešavanje diferencijalne jednačine



2. $u_i(t) = (U - U_0)h(t - t_0) + U_0$

gde je h(t) Hejvisajdova funkcija.

Kako je

$$u_o(t) = u_C(t)$$

Konačna diferencijalna jednačina za rešavanje uz ovu pobudu je

$$RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t)$$



$$RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t)$$

Opšte rešenje

za $t \geq t_0$

$$u_o(t) = K_1 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + K_2$$

Gde je $\tau = RC$ i naziva se vremenskom konstantom kola.

Ima dimenziju vremena i konstantna je za ovo kolo.

U opštem slučaju kola sa jednim kondenzatorom ova vremenska konstanta se dobija kao proizvod kapacitivnosti C i otpornosti koju ta kapacitivnost vidi kada se nezavisni naponski izvori (unutrašnja otpornost jednaka nuli) u kolu kratko spoje a nezavisni strujni izvori (unutrašnja otpornost jednaka beskonačnosti) izbace iz kola. Zavisni izvori ostaju takvi kakvi jesu u kolu.



Ostaje da odredimo konstante K_1 i K_2 . One se određuju iz početnih uslova.

Kako smo ustanovili da je u trenutku t_0 napon na kondenzatoru U_L i iz opšteg rešenja

$$u_o(t_0) = K_1 e^{-\frac{t_0 - t_0}{\tau}} + K_2 = K_1 + K_2$$

Onda je

$$K_1 + K_2 = U_L$$

Isto tako iz diferencijalne jednačine kola

$$RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t) \Rightarrow \frac{du_o(t)}{dt} = \frac{u_i(t) - u_o(t)}{RC} \Rightarrow \frac{du_o(t_0)}{dt} = \frac{u_i(t_0) - u_o(t_0)}{RC} \Rightarrow \frac{du_o(t_0)}{dt} = \frac{U_H - U_L}{\tau}$$

a iz opšteg rešenja

$$\frac{du_o(t)}{dt} = \frac{d\left(K_1 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + K_2\right)}{dt} = -\frac{K_1}{\tau} e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

i u trenutku $t=t_0$

$$\left. \frac{du_o(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = -\frac{K_1}{\tau}$$



Sve u svemu

$$K_1 + K_2 = U_L$$

$$\frac{U_H - U_L}{\tau} = -\frac{K_1}{\tau}$$

pa je

$$K_1 = -(U_H - U_L) \quad i \quad K_2 = U_H$$

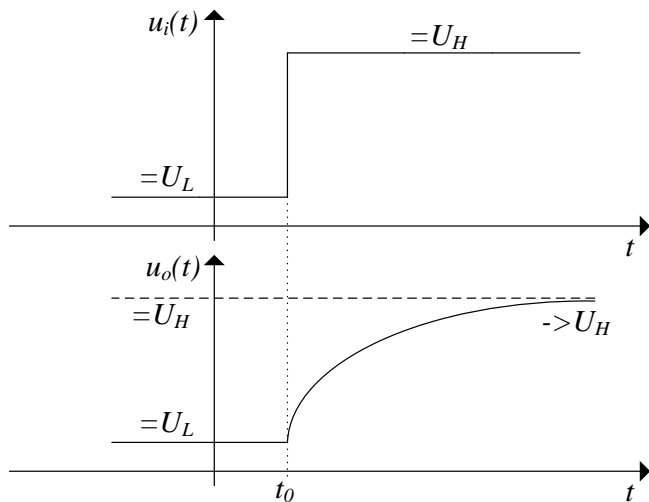
odnosno rešenje za izlazni napon je

$$u_o(t) = -(U_H - U_L)e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + U_H \quad t \geq t_0$$

i dosta često se piše u sledećem obliku

$$u_o(t) = (U_H - U_L)\left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right) + U_L \quad t \geq t_0$$





Gledajući izraz za izlazni napon, vidimo da vrednost teži ka konačnoj vrednosti U_H , i dostiže je tek u tački $t=\infty$, kada se i završava prelazni proces. Za praktične slučajeve a i za crtanje, ovo nam baš i nije zgodno.

Zbog toga se u praksi smatra da se prelazni proces završava posle vremena 5τ , kada se dostiže 99.3% promene.

Sve poznato iz Digitalne elektronike



Dugačije viđenje - Opšte rešenje

$$u_o(t) = K_1 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + K_2$$

Oznake

$\lim_{t \rightarrow \infty} u_x(t) = u_x(\infty)$ - napon u beskonačnosti,

$u_x(t_0^-)$ za $(t_0 - t_0^-) \rightarrow 0$ - napon u trenutku neposredno pre trenutka t_0 , pre dejstva promene

$u_x(t_0^+)$ za $(t_0^+ - t_0) \rightarrow 0$ - napon u trenutku neposredno posle trenutka t_0 , posle dejstva promene.

1.

$$u_o(t_0^+) = K_1 e^{-\frac{t_0^+ - t_0}{\tau}} + K_2 = K_1 + K_2$$

onda je

$$K_1 + K_2 = u_o(t_0^+)$$



2.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_o(t_0) = u_o(\infty)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (K_1 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + K_2) = K_2$$

onda je

$$K_2 = u_o(\infty)$$

pa je i

$$K_1 = u_o(t_0^+) - u_o(\infty)$$

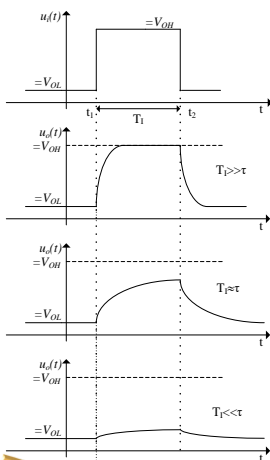
Rešenje diferencijalne jednačine je

$$u_o(t) = u_o(\infty) + (u_o(t_0^+) - u_o(\infty))e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \quad \text{za } t \geq t_0$$

Takođe poznato iz Digitalne elektronike, gde smo ovaj rezultat puno koristili



Na osnovu tih rezultata u Digitalnoj elektronici smo mogli „odmah“ da pretpostavimo šta se dešava u različitim situacijama



I izračunamo

$$u_o(t) = V_{OL} \quad \text{za } t < t_1$$

$$u_o(t) = V_{OH} + (V_{OL} - V_{OH})e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} \quad \text{za } t_2 \geq t \geq t_1$$

U trenutku t_2 nastupa druga, drugačija, pobuda. Znači opšte rešenje jeste

$$u_o(t) = u_o(\infty) + (u_o(t_2^+) - u_o(\infty))e^{-\frac{t-t_2}{\tau}} \quad \text{za } t \geq t_2$$

$$u_o(t_2^+) = u_c(t_2^+) = u_c(t_2^-) = u_o(t_2^-)$$

$$u_o(t_2^-) = V_{OH} + (V_{OL} - V_{OH})e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau}}$$

$$u_o(\infty) = u_i(\infty) - Ri_R(\infty) = V_{OL}$$

I na kraju

$$\text{za } t \geq t_2$$

$$u_o(t) = V_{OL} + (V_{OH} + (V_{OL} - V_{OH})e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau}} - V_{OL})e^{-\frac{t-t_2}{\tau}}$$

$$u_o(t) = V_{OL} + \left((V_{OH} - V_{OL})(1 - e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau}}) \right) e^{-\frac{t-t_2}{\tau}}$$



Signal: svaka fizička veličina koja nosi neku informaciju

U digitalnoj elektronici naponski nivoi V_{OL} i V_{OH} koji nose informacije o logičkoj nuli i logičkoj jedinici

U digitalnoj elektronici nam je bilo bitno **vreme**.

Kada se šta dešava.

Kada logička kola manipulišu sa sigurnim naponskim nivoima odnosno **kada** imaju sigurnu informaciju o logičkim nulama i jedinicama.

Kašnjenje signala, vreme uspona i pada signala, učestanost.

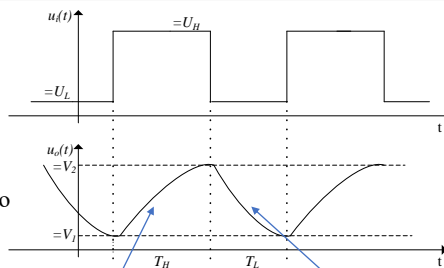
I za nas je ovakva analiza u digitalnoj elektronici bila adekvatna i dovoljna.

Dalje od ovoga nismo išli i nije nam bilo potrebno.



Da se vratimo na naš problem.

Na osnovu prethodnog možemo da pretpostavimo



Pa i izračunamo

$$u_o(t) = U_H + (V_1 - U_H)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad u_o(t) = U_L + (V_2 - U_L)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$V_2 = U_H + (V_1 - U_H)e^{-\frac{T_H}{\tau}} \qquad V_1 = U_L + (V_2 - U_L)e^{-\frac{T_L}{\tau}}$$

$$V_1 = \frac{U_L + (U_H - U_L)e^{-\frac{T_L}{\tau}} - U_H e^{-\frac{T_L+T_H}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T_L+T_H}{\tau}}}$$

Itd ...



Primer obrade signala u frekvencijskom domenu



A šta ako pobuda nije pravougaona?

Šta ako sada ovakav izlazni signal ide na naredno RC kolo ili neko slično?

Šta ako nije samo jedan akumulativni element?

Na svu sreću u digitalnoj elektronici nam to nije bilo od interesa.

Ali u nekim drugim oblastima elektrotehnike, elektronike ... postoji interes da znamo šta se dešava i u takvim situacijama.

Na primer interesuje nas izlazni signal ako je pobuda sinusoidalna u ustaljenom režimu.

$$u_i(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Ili nas interesuju i prelazni procesi kada se takva sinusoidalna pobuda pojavi

$$u_i(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) * h(t)$$

Ili je bilo kakva pobuda na ulazu

$$u_i(t) = f(t)$$

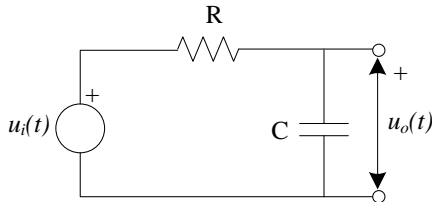
$$u_o(t) = ?$$



Odgovore na prethodna pitanja može da nam da **teorija kola** i razne transformacije koje sistem, analizu, posmatraju u **drugim domenima** osim vremenskog

Kako će se sistem ponašati ako su na ulazu prostoperiodični signali različitih učestanosti u ustaljenom režimu, i-ili ako se pojavi pobuda u nekom trenutku, ...

Bitno: Sistem je LTI (Linear Time Invariant)



Laplasova transformacija

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{sRC + 1}$$

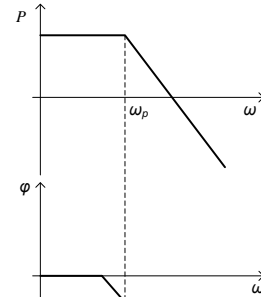
Furijeova transformacija

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)RC + 1} = P(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)RC + 1} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_p}} = \frac{\omega_p}{\omega_p + j\omega} \quad \omega_p = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$$

Ustaljena prostoperiodična pobuda

Frekventni domen



Grafička predstava

Najčešće: Logaritamske razmere



Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

Digitalna obrada signala - 2022/23

27

27

CTFS – Continuous Time Fourier Series

$x(t)$ periodična funkcija sa periodom $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$X[jk\omega_0] = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[jk\omega_0]e^{jk\omega_0 t}$$

$X[jk\omega_0]$ Kompleksna veličina čija faza zavisi i od **izbora trenutka t_0**

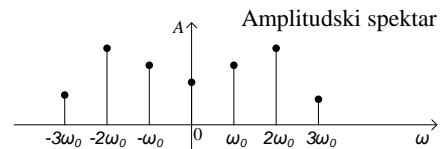
$$X[k\omega_0]$$

$$X[k]$$

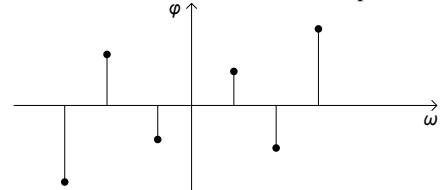
Harmonijske komponente signala

Postoje negativne učestanosti $k < 0$

Spektar signala – grafička predstava



Fazni spektar



Spektar je linijski, diskretan.

Harmonijske komponente postoje samo na multiplima osnovne učestanosti.



Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

Digitalna obrada signala - 2022/23

28

28

SUPERPOZICIJA

Pobuda = zbir dve ili više pobuda $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

Znamo odziv sistema na svaku pobudu $x_1(t) \Rightarrow y_1(t)$
 $x_2(t) \Rightarrow y_2(t)$

Onda je odziv na zbirnu pobudu $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$

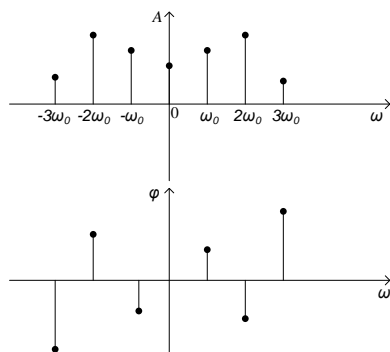
Važi i za linearnu kombinaciju

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

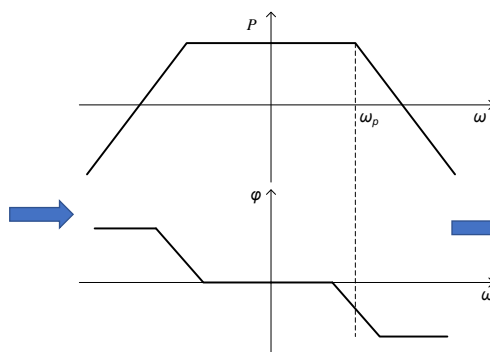
$$y(t) = ay_1(t) + by_2(t)$$



Znamo spektar ulaznog signala $X[k]$



Znamo funkciju prenosa sistema odnosno $H[k]$



Računamo

$$Y[jk\omega_0] = X[jk\omega_0]H[jk\omega_0]$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y[jk\omega_0]e^{jk\omega_0 t}$$

„Pravo“ sumiranje na izlazu ćemo retko raditi.

Najčešće će nas interesovati kako izgleda spektar signala posle prolaska kroz sistem – „obrade“.

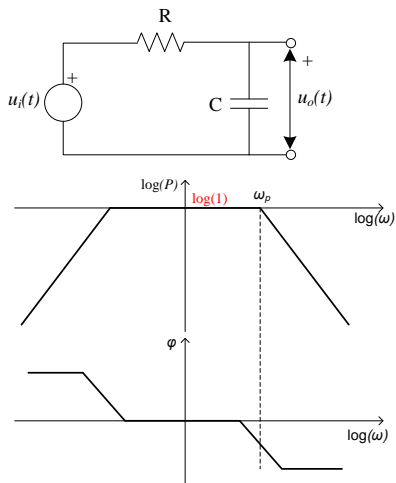
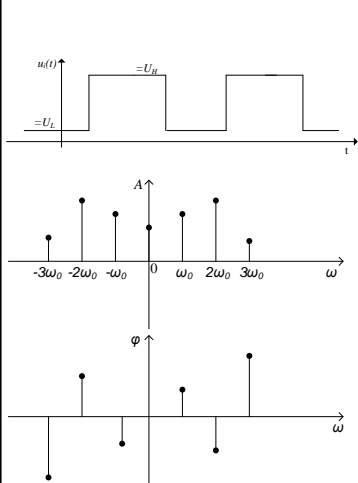
Želimo da istaknemo neke komponente, da potisnemo neke komponente, dodamo neke komponente, da kvalitativno i kvantitativno vidimo šta se dešava itd...

Te komponente nose informacije. U amplitudi, fazi, međusobnom odnosu, ...

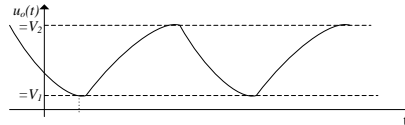
To je naša obrada signala, informacija. Analiza i sinteza.



U našem slučaju na osnovu znanja (koje imamo ili ćemo steći)



Potisnute visokofrekventne komponente koje su zadužene za brze usponske i silazne ivice. Promena signala se „usporava“. Jednosmerna komponenta ostaje nepromenjena.



$$H(j0) = \frac{1}{1 + j\frac{0}{\omega_p}} = 1$$

$$H(j\infty) = \frac{1}{1 + j\frac{\infty}{\omega_p}} = 0$$

Najčešće: Logaritamske razmere



Da vidimo i računanje u našem slučaju ali sada preko Furijeove transformacije, odnosno CTFS. Neke stvari odavde će nam trebati i kasnije u toku kursa.

Naša pobuda $u_i(t)$ je periodična funkcija sa periodom $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = T_H + T_L$

Razvoj pobude u Furijeov red

$$X[jk\omega_0] = X[k\omega_0] = X[k] = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Uočite da će od trenutka t_0 koji izaberemo zavisiti samo fazni stavovi harmonijskih komponenti. Neka to bude pojava usponske ivice signala. Integral postaje:

$$X[jk\omega_0] = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left(\int_{t_0}^{t_0+T_H} U_H e^{-jk\omega_0 t} dt + \int_{t_0+T_H}^{t_0+T_H+T_L} U_L e^{-jk\omega_0 t} dt \right)$$



Postepeno da vidimo svaki korak pošto će nam se mnoge stvari ponovo dešavati u računima

$$X[jk\omega_0] = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left(\int_{t_0}^{t_0+T_H} U_H e^{-jk\omega_0 t} dt + \int_{t_0+T_H}^{t_0+T_H+T_L} U_L e^{-jk\omega_0 t} dt \right)$$

$$X[jk\omega_0] = \frac{1}{T_0} \left(\frac{U_H}{-jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{t_0}^{t_0+T_H} + \frac{U_L}{-jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{t_0+T_H}^{t_0+T_H+T_L} \right)$$

$$X[jk\omega_0] = \frac{\omega_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{-jk\omega_0} \left(U_H (e^{-jk\omega_0(t_0+T_H)} - e^{-jk\omega_0 t_0}) + U_L (e^{-jk\omega_0(t_0+T_H+T_L)} - e^{-jk\omega_0(t_0+T_H)}) \right)$$

$$X[jk\omega_0] = \frac{j}{2\pi k} e^{-jk\omega_0 t_0} \left((U_H - U_L) e^{-jk\omega_0 T_H} - (U_H - U_L) \right)$$

$$X[jk\omega_0] = \frac{j(U_H - U_L)}{2\pi k} e^{-jk(\omega_0 t_0)} (e^{-jk\omega_0 T_H} - 1)$$

Izbor t_0 unosi samo „dodatne“ fazne stavove u komponente. Linearno sa učestanošću. Mogli smo da izaberemo bilo koji trenutak.



$$X[jk\omega_0] = \frac{j(U_H - U_L)}{2\pi k} e^{-jk\varphi_0} (e^{-jk\omega_0 T_H} - 1) \quad \text{dalje sređivanje izraza da bi doveli u „standardnu“ formu}$$

$$X[jk\omega_0] = j(U_H - U_L) \frac{(e^{-jk\omega_0 T_H} - 1)}{2\pi k} e^{-jk\varphi_0}$$

$$X[jk\omega_0] = j(U_H - U_L) \frac{e^{-j\frac{k\omega_0 T_H}{2}} (e^{-j\frac{k\omega_0 T_H}{2}} - e^{+j\frac{k\omega_0 T_H}{2}})}{2\pi k} e^{-jk\varphi_0}$$

$$X[jk\omega_0] = j(U_H - U_L) \frac{-2j \sin\left(\frac{k\omega_0 T_H}{2}\right)}{2\pi k} e^{-j\frac{k\omega_0 T_H}{2}} e^{-jk\varphi_0} \quad \text{nenormalizovana}$$

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$X[jk\omega_0] = (U_H - U_L) \frac{T_H}{T_H + T_L} \frac{\sin\left(\frac{k\omega_0 T_H}{2}\right)}{\frac{k\omega_0 T_H}{2}} e^{-jk(\omega_0 T_H + \varphi_0)} \quad \text{normalizovana}$$

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Jako bitna stvar: naš signal ima diskontinuitete u tačkama t_0, \dots tamo gde se menja.

Znači sve ovo važi za $k \neq 0$. Za $k = 0$ računanje srednje vrednosti:

$$X[0] = \frac{U_H T_H + U_L T_L}{T_H + T_L}$$



$$k \neq 0 \quad X[jk\omega_0] = (U_H - U_L) \frac{T_H}{T_H + T_L} \frac{\sin\left(\frac{k\omega_0 T_H}{2}\right)}{\frac{k\omega_0 T_H}{2}} e^{-jk(\omega_0 T_H + \varphi_0)}$$

$$X[j0\omega_0] = \frac{U_H T_H + U_L T_L}{T_H + T_L}$$

Da vidimo kako izgleda „restauracija“ signala

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[jk\omega_0] e^{jk\omega_0 t} =$$

$$\frac{U_H T_H + U_L T_L}{T_H + T_L} +$$

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} (U_H - U_L) \frac{T_H}{T_H + T_L} \frac{\sin\left(\frac{k\omega_0 T_H}{2}\right)}{\frac{k\omega_0 T_H}{2}} e^{jk(\omega_0 t - \omega_0 T_H - \varphi_0)} +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (U_H - U_L) \frac{T_H}{T_H + T_L} \frac{\sin\left(\frac{k\omega_0 T_H}{2}\right)}{\frac{k\omega_0 T_H}{2}} e^{jk(\omega_0 t - \omega_0 T_H - \varphi_0)}$$



Posle sredivanja

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[jk\omega_0] e^{jk\omega_0 t} =$$

$$\frac{U_H T_H + U_L T_L}{T_H + T_L} +$$

$$(U_H - U_L) \frac{T_H}{T_H + T_L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\omega_0 T_H}{2}\right)}{\frac{k\omega_0 T_H}{2}} (e^{-jk(\omega_0 t - \omega_0 T_H - \varphi_0)} + e^{jk(\omega_0 t - \omega_0 T_H - \varphi_0)})$$

ili

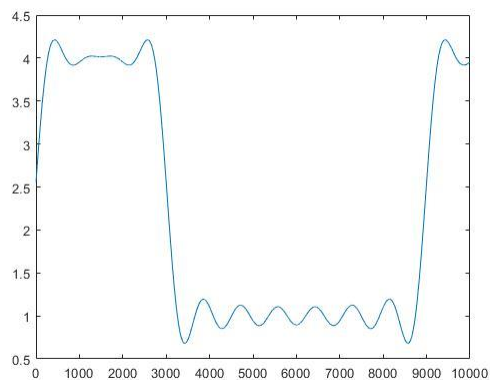
$$x(t) = \frac{U_H T_H + U_L T_L}{T_H + T_L} + 2(U_H - U_L) \frac{T_H}{T_H + T_L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\omega_0 T_H}{2}\right)}{\frac{k\omega_0 T_H}{2}} \cos(k(\omega_0 t - \omega_0 T_H - \varphi_0))$$



Koliko uzeti komponenti u realnom računanju a da imamo dobru predstavu signala?

$$U_H=4, U_L=1, T_H=3000, T_L=6000$$

Broj komponenti 10



Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

Digitalna obrada signala - 2022/23

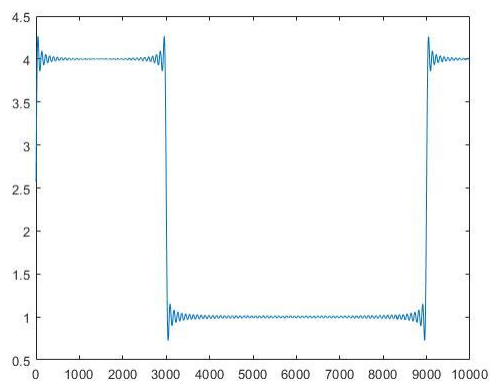
37

37

Koliko uzeti komponenti u realnom računanju a da imamo dobru predstavu signala?

$$U_H=4, U_L=1, T_H=3000, T_L=6000$$

Broj komponenti 100



Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

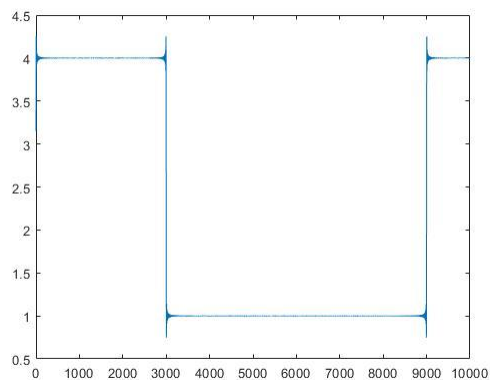
Digitalna obrada signala - 2022/23

38

38

Koliko uzeti komponenti u realnom računanju a da imamo dobru predstavu signala?

$U_H=4, U_L=1, T_H=3000, T_L=6000$
Broj komponenti 1000



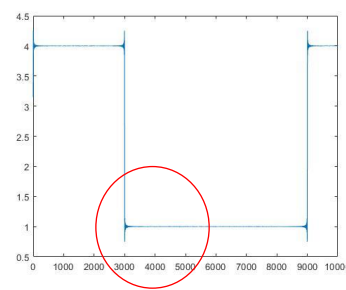
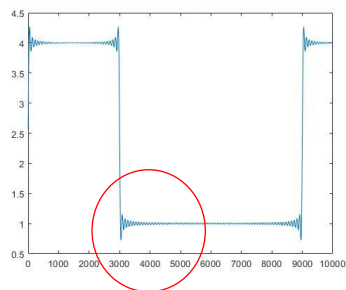
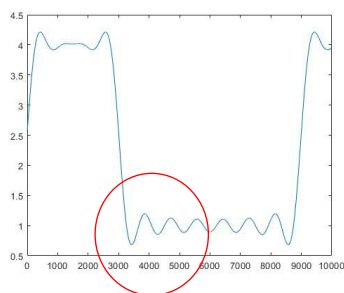
Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

Digitalna obrada signala - 2022/23

39

39

Gibsov fenomen
Gibsove oscilacije
Razlog diskontinuitet u signalu



Da bi nestale morali bi uzeti sve komponente
Matematika.



Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

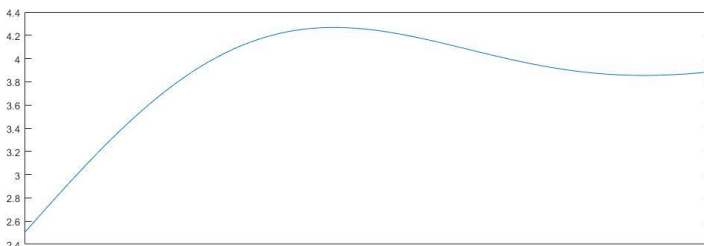
Digitalna obrada signala - 2022/23

40

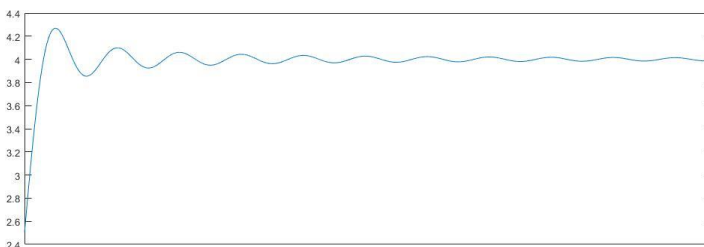
40

Poblem crtanja: da ne bi pomislili da oscilacije nestaju gledajući treću sliku.
Zgušnjavaju se. Premašenje „isto“. Gibsova konstanta 0.089489....

Broj komponenti 1000



Broj komponenti 10000



Da vidimo izlazni signal iz našeg RC kola

$$X[j0\omega_0] = \frac{U_H T_H + U_L T_L}{T_H + T_L} \quad X[jk\omega_0] = (U_H - U_L) \frac{T_H}{T_H + T_L} \frac{\sin\left(\frac{k\omega_0 T_H}{2}\right)}{\frac{k\omega_0 T_H}{2}} e^{-jk(\omega_0 T_H + \varphi_0)}$$

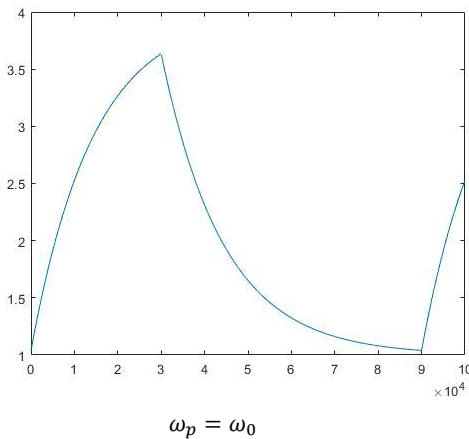
$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)RC + 1} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_p}} = \frac{\omega_p}{\omega_p + j\omega} = H_{RC}(\omega) e^{j\varphi_{RC}(\omega)}$$

$$H_{RC}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}} = H_{RC}(\omega) e^{j\varphi_{RC}(\omega)} \quad \varphi_{RC}(\omega) = \tan^{-1}\left(-\frac{\omega}{\omega_p}\right)$$

$$y(t) = \frac{U_H T_H + U_L T_L}{T_H + T_L} + 2(U_H - U_L) \frac{T_H}{T_H + T_L} \sum_{k=1}^{\infty} H_{RC}(k\omega_0) \frac{\sin\left(\frac{k\omega_0 T_H}{2}\right)}{\frac{k\omega_0 T_H}{2}} \cos(k(\omega_0 t - \omega_0 T_H - \varphi_0) + \varphi_{RC}(k\omega_0))$$

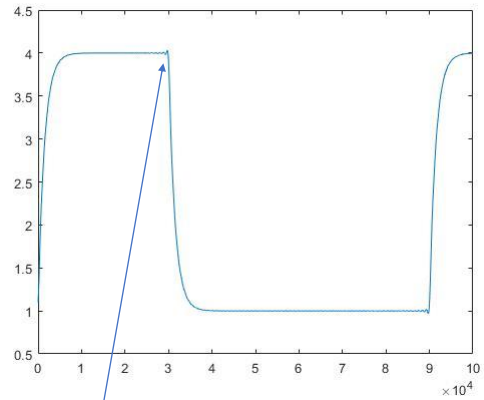


Potisnute više harmonijske komponente



$$\omega_p = \omega_0$$

Dosta viših harmonijskih komponenti „prolazi“



$$\omega_p = 10\omega_0$$

Zašto na slici 2 mogu da se uoče Gibbsove oscilacije?
Da li u realnosti one postoje?



Šta je bolje raditi

- Analizu i sintezu u vremenskom domenu
- Analizu i sintezu u frekventnom domenu

Nema jedinstvenog odgovora.

U ovom primeru smo videli da smo dobili „identične“ rezultate .

I mora tako. Matematike to pokazuje.

Transformacije su jedinstvene iz jednog u drugi domen.

Jedini odgovor:

Šta je lakše i primerenije za dati problem.

U digitalnoj elektronici je to bio vremenski domen i na osnovu ovoga što smo izvodili liči čak i da je lakše.
Ali ne zaboravite da nam je uslov bio jedno kolo sa jednim akumulativnim elementom.

Dosta ograničavajuće za neke druge oblasti.

Na primer telekomunikacije.



Transformacije su „jedinstvene“

PARSEVALOVA TEOREMA ZA CTFS

Snage su jednake u vremenskom i frekvencijskom domenu

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X[jk\omega_0]|^2$$

NAPOMENA: energija periodičnog signala beskonačna



Često radi jednostavnosti naš pobudni signal se posmatra kao: simetričan signal $T_H=T_L$ i $t_0=0$ i $U_L=0$

$$X[j0\omega_0] = \frac{U_H}{2} \quad X[jk\omega_0] = \frac{U_H}{2} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{\frac{k\pi}{2}} e^{-jk\frac{\pi}{2}}$$

Rekonstrukcija

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[jk\omega_0] e^{jk\omega_0 t} = \frac{U_H}{2} + U_H \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{\frac{k\pi}{2}} \cos\left(k\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

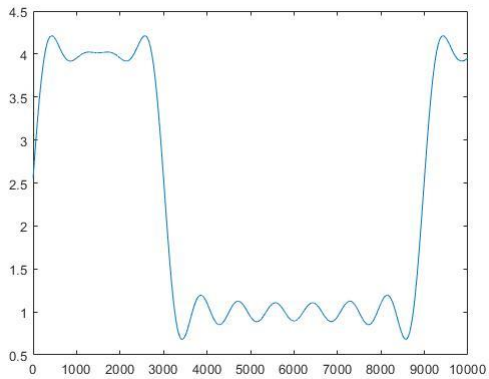
Uočiti da postoje samo neparni harmonici

Zanimljivo u tačkama diskontinuiteta $t_0 = l\frac{T}{2} = l\frac{\pi}{\omega_0}$ l ceo broj

$$x(t_0) = \frac{U_H}{2} + U_H \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{\frac{k\pi}{2}} \cos\left(k\left(\omega_0 t_0 + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{U_H}{2} \quad \text{Zato je definicija Hejvisajdove funkcije } h(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{za } t = 0 \\ 1 & \text{za } t > 0 \end{cases}$$



Na koji način je formirana, nacrtana, na primer slika



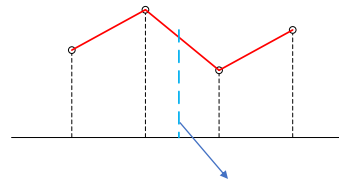
Crtana je računarski, tačka po tačka.

Gledajući jednačine, ovo je bio vremenski kontinualan signal.

Beskonačan broj tačaka. Bez obzira na računar to je nemoguće.

Beskonačno vreme potrebno za takav proračun.

Izabrane su neke tačke, izračunata vrednost u tim tačkama, a onda je za crtanje rađena interpolacija između tih vrednosti.



Ova tačka nije izabrana. Da li je napravljena greška? Možda funkcija baš tu ima neku veliku ili malu vrednost?

Ako ima greška, kolika je?

Da li postoje pravila kako izabrati tačke, rastojanje između tačaka?

Na našim primerima je to vreme.



Znači radili smo „odabiranje“ kontinualnog signala

Da ponovimo pitanja koja se postavljaju prilikom odabiranja:

1. Da li ti odmerci uzeti po odgovarajućem pravilu nose kompletnu informaciju o odabiranom signalu?
2. Da li se na osnovu tih odmeraka može rekonstruisati originalni signal i pod kojim uslovima?
3. Koja su to pravila i uslovi?

Odgovor daje **TEOREMA O ODABIRANJU**



TEOREMA ODABIRANJA

Digresija: da vas ne zbuni

Do sada nam bila periodičnost signala $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Menjamo oznake radi lakšeg praćenja – nadalje periodičnost signala $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$



Teorema odabiranja, malo drugačiji pogled

Radimo odabiranje prostoperiodičnog realnog signala čija je učestanost $\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$

$$x_p(t) = A \cos(\omega_p t + \varphi_0)$$

$$x_p(t) = A \frac{e^{j(\omega_p t + \varphi_0)} + e^{-j(\omega_p t + \varphi_0)}}{2} = \frac{A}{2} (e^{j(\omega_p t + \varphi_0)} + e^{-j(\omega_p t + \varphi_0)}) = \frac{A}{2} (x_{c_p}(t) + x_{c_p}^*(t))$$

Posmatraćemo samo $x_{c_p}(t)$ i uraditi odabiranje na tom kompleksnom signalu pa ćemo znajući osobine transformacija lako formirati konačan rezultat.

Digresija:
$$\mathcal{F}(x_p(t)) = \mathcal{F}\left(\frac{A}{2} (e^{j(\omega_p t + \varphi_0)} + e^{-j(\omega_p t + \varphi_0)})\right) = \frac{A}{2} (\mathcal{F}(x_{c_p}(t)) + \mathcal{F}(x_{c_p}^*(t)))$$

$$\mathcal{F}(x_{c_p}(t)) = XC_p[j\omega_p] = e^{j\varphi_0} \text{ u ostalim tačkama } = 0$$

$$\mathcal{F}(x_{c_p}^*(t)) = XC_p^*[-j\omega_p] = e^{-j\varphi_0} \text{ u ostalim tačkama } = 0$$

$$x_p(t) = \frac{A}{2} (XC_p^*[-j\omega_p] \cdot e^{-j\omega_p t} + XC_p[j\omega_p] \cdot e^{j\omega_p t})$$



Teorema odabiranja, malo drugačiji pogled

Posmatraćemo samo $xc_p(t)$ i uraditi odabiranje na tom kompleksnom signalu pa ćemo znajući osobine transformacija lako formirati konačan rezultat.

Odabiranje radimo u ekvidistantnim vremenskim tačkama sa razmakom T_s . Odnosno sa učestanošću $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$

Konačan rezultat treba da nam da informaciju o A , ω_p , φ_0 , što možemo dobiti iz spektra odabranog signala.

Tražimo spektar odabranog signala.

Odabiranje će biti koherentno (tačnija definicija **koherentnog odabiranja**):

U m perioda signala uzimamo N odmeraka pri čemu su m i N celi uzajmno prosti brojevi.

$$mT_p = NT_s$$

Pa je i

$$N\omega_p = m\omega_s$$



Odabiranjem smo dobili novi signal

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} xc_p(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

Signal je periodičan sa periodom $mT_p = NT_s$

$$xc_p(nT_s + NT_s) = xc_p(nT_s + mT_p) = xc_p(nT_s)$$

Uočiti: ne može kraća perioda pošto su N i m uzajmno prosti brojevi

Periodičan signal – primenjujemo CTFS – komponente na učestanosti $\frac{2\pi}{mT_p} = \frac{\omega_p}{m}$

$$\begin{aligned} X_s \left[jk \left(\frac{\omega_p}{m} \right) \right] &= \frac{1}{mT_p} \int_{mT_p} x_s(t) e^{-jk \frac{\omega_p}{m} t} dt = \frac{1}{mT_p} \int_{mT_p} \left(\sum_{n=0}^{N-1} xc_p(nT_s)\delta(t - nT_s) \right) e^{-jk \frac{\omega_p}{m} t} dt \\ &= \frac{1}{mT_p} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{mT_p} xc_p(nT_s)\delta(t - nT_s) e^{-jk \frac{\omega_p}{m} t} dt \right) = \frac{1}{mT_p} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{mT_p} xc_p(nT_s) e^{-jk \frac{\omega_p}{m} nT_s} dt \right) \\ &= \frac{1}{mT_p} \sum_{n=0}^{N-1} xc_p(nT_s) e^{-jk \frac{\omega_p}{m} nT_s} = \frac{1}{mT_p} \sum_{n=0}^{N-1} xc_p(nT_s) e^{-jk \frac{\omega_p}{m} n \frac{2\pi}{\omega_s}} = \frac{1}{mT_p} \sum_{n=0}^{N-1} xc_p(nT_s) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \end{aligned}$$



$$X_s \left[jk \left(\frac{\omega_p}{m} \right) \right] = \frac{1}{mT_p} \sum_{n=0}^{N-1} x_{c_p}(nT_s) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{mT_p} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_p n T_s} e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} e^{j\varphi_0}$$

$$= \frac{1}{mT_p} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} mn} e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} e^{j\varphi_0} = \frac{1}{mT_p} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n \left(\frac{m-k}{N} \right)} e^{j\varphi_0}$$

Uočiti da ne postoje T_p i T_s u izrazima u sumi. Postoji samo njihov odnos $\frac{m}{N}$

Da li u spektru postoji samo jedna linija kao kada smo radili CTFS nad kontinualnim signalom?

Spektar sada ima beskonačno mnogo linija sa periodom ω_s .

$$X_s \left[jk \left(\frac{\omega_p}{m} \right) \right] = \frac{1}{mT_p} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n \left(\frac{m-k}{N} \right)} e^{j\varphi_0}$$

$$k = m \Rightarrow X_s \left[jm \left(\frac{\omega_p}{m} \right) \right] = X_s[j\omega_p] = \frac{1}{mT_p} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n \left(\frac{m-m}{N} \right)} e^{j\varphi_0} = \frac{N}{mT_p} e^{j\varphi_0} = \frac{1}{T_s} e^{j\varphi_0} = \frac{1}{T_s} X_{C_p}[j\omega_p]$$

$$k = m \pm lN \Rightarrow X_s \left[j(m \pm lN) \left(\frac{\omega_p}{m} \right) \right] = X_s[j(\omega_p \pm l\omega_s)] = \frac{1}{mT_p} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n \left(\frac{m-m \pm lN}{N} \right)} e^{j\varphi_0} = \frac{N}{mT_p} e^{j\varphi_0} = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{T_s} X_{C_p}[j\omega_p]$$

gde je l ceo broj



Da vas ne zbuni pošto znate teoremu odabiranja. Odabirali smo kompleksan signal sa pozitivnom učestanošću.

Da smo odabirali kompleksan signal sa negativnom učestanošću

$$X_s^* \left[jk \left(\frac{\omega_p}{m} \right) \right] = \frac{1}{mT_p} \sum_{n=0}^{N-1} x_{c_p}^*(nT_s) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{mT_p} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega_s n T_s} e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} e^{-j\varphi_0}$$

$$= \frac{1}{mT_p} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi}{N} mn} e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} e^{-j\varphi_0} = \frac{1}{mT_p} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n \left(\frac{-m-k}{N} \right)} e^{-j\varphi_0}$$

I od njega bi postojale komponente na učestanostima

$$k = -m \pm lN \Rightarrow \frac{1}{T_s} X_{C_p}^*[-j\omega_p]$$

„Pravi“ spektar naše odabrane realne sinusoide je zbir ovih spektara.

Šta smo dobili

1. Periodičan spektar. Preslikan originalni spektar oko učestanosti $\pm l\omega_s$.
2. Komponenta sa pozitivnom učestanošću u spektru daje spektralne linije na učestanostima
 $\dots, -2\omega_s + \omega_p, -\omega_s + \omega_p, \omega_p, \omega_s + \omega_p, 2\omega_s + \omega_p, \dots$
3. Komponenta sa negativnom učestanošću u spektru daje spektralne linije na učestanostima
 $\dots, -2\omega_s - \omega_p, -\omega_s - \omega_p, -\omega_p, \omega_s - \omega_p, 2\omega_s - \omega_p, \dots$

Amplitude je skalirana, ali ako to znamo dobili smo „tačne“ informacije. Možemo rekonstruisati signal. Za rekonstrukciju samo osnovni spektar.



Da li je baš sve tako? I da li postoje neka dodatna pravila za izbor m i N osim da su uzajamno prosti?

Za početak radi jednostavnosti: $m=1$, odabiranje u jednoj periodu $X_s[jk\omega_p] = \frac{1}{T_p} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n(\frac{1-k}{N})} e^{j\varphi_0}$

PRVI SLUČAJ

UZIMAMO SAMO JEDAN ODMERAK U PERIODI $N = 1$

$$\omega_s = \omega_p$$

$$X_s[jk\omega_p] = \frac{1}{T_p} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n(\frac{1-k}{1})} e^{j\varphi_0} = \frac{e^{j\varphi_0}}{T_p} \text{ za bilo koje } k, \text{ uključujući } k = 0$$

$$X_s^*[jk\omega_p] = \frac{1}{T_p} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n(\frac{-1-k}{1})} e^{-j\varphi_0} = \frac{e^{-j\varphi_0}}{T_p} \text{ za bilo koje } k, \text{ uključujući } k = 0$$

Osnovni spektar je očigledno $k=0$. Kao da smo odabirali jednosmerni signal.

Ne postoji informacija o fazi, a amplituda je određena početnim faznim stavom odnosno trenutkom kada smo uzeli odmerak.

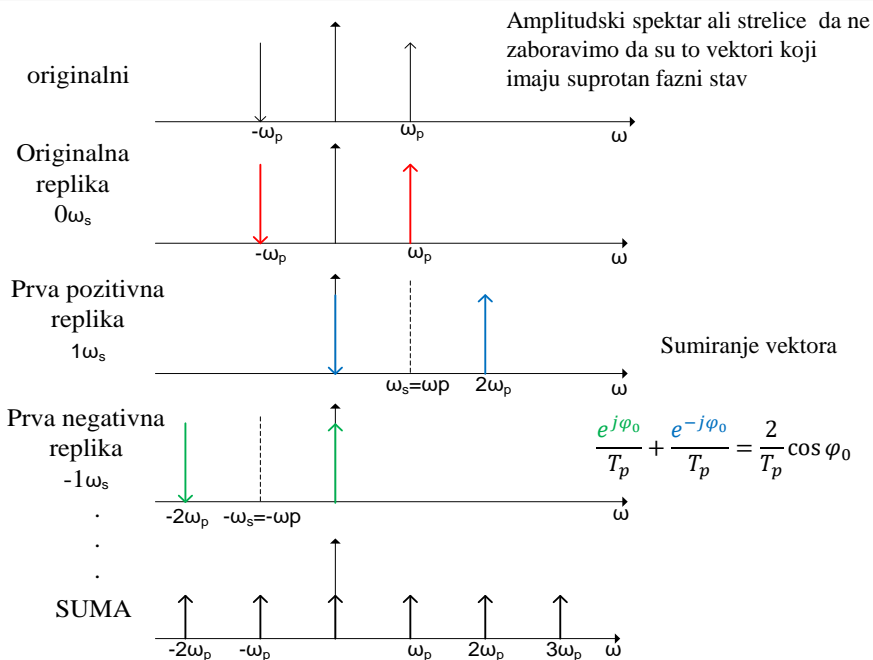
Mora $N > 1$



Šta se desilo

$$\omega_s = \omega_p$$

PREKLAPANJE SPEKTARA (REPLIKA)



DRUGI SLUČAJ

UZIMAMO DVA ODMERKA U JEDNOJ PERIODI $N = 2$

$$\omega_s = 2\omega_p$$

$$X_s[jk\omega_p] = \frac{1}{T_p} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n(\frac{1-k}{2})} e^{j\varphi_0} = \begin{cases} 0 & \text{za parno } k \\ 2e^{j\varphi_0}/T_p & \text{za neparno } k \text{ i pozitivno i negativno} \end{cases}$$

$$X_s^*[jk\omega_p] = \frac{1}{T_p} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n(\frac{-1-k}{2})} e^{-j\varphi_0} = \begin{cases} 0 & \text{za parno } k \\ 2e^{-j\varphi_0}/T_p & \text{za neparno } k \text{ i pozitivno i negativno} \end{cases}$$

Neparno pozitivno k , dolazi do preklapanja i sabiranja replika spektralnih linija. Postoje za isto k .

$$X_{sp}[jk\omega_p] = X_s[jk\omega_p] + X_s^*[jk\omega_p] = \frac{2}{T_p} (e^{j\varphi_0} + e^{-j\varphi_0}) = \frac{2}{T_p} \cos(\varphi_0)$$

Ne postoji informacija o fazi, a amplituda je određena početnim faznim stavom odnosno trenutkom kada smo uzeli odmerak

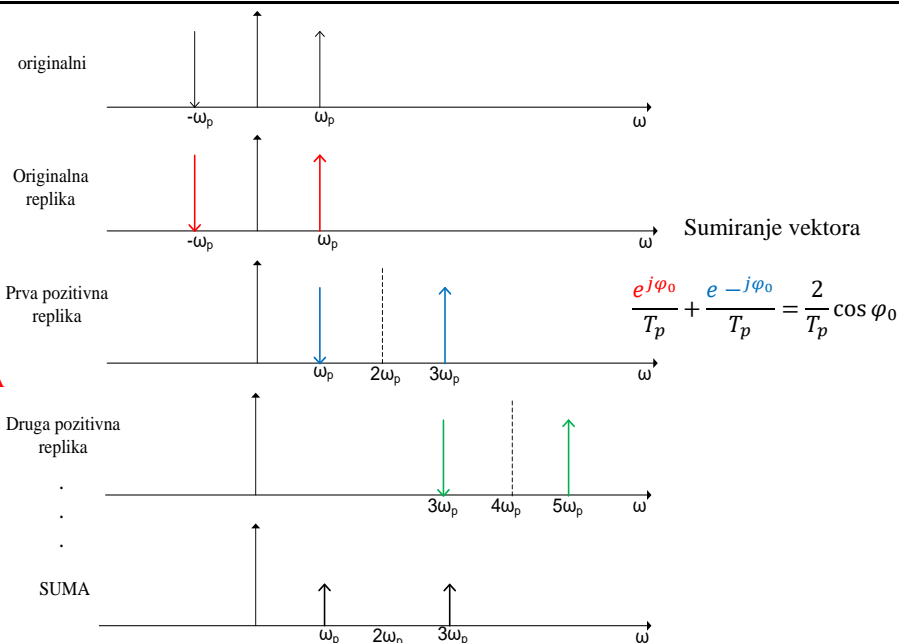
Mora $N > 2$



Šta se desilo

$$\omega_s = 2\omega_p$$

**PREKLAPANJE SPEKTARA
(REPLIKA)**



TREĆI SLUČAJ

U JEDNOJ PERIODI UZIMAMO $N > 2$ ODMERAČA

$$\omega_s = N\omega_p$$

$$X_s[jk\omega_p] = \frac{1}{T_p} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n(\frac{1-k}{N})} e^{j\varphi_0} = \frac{e^{j\varphi_0}}{T_p} \cdot \frac{1 - (e^{j2\pi(\frac{1-k}{N})})^N}{1 - e^{j2\pi(\frac{1-k}{N})}} = \frac{e^{j\varphi_0}}{T_p} \cdot \frac{1 - e^{j2\pi(1-k)}}{1 - e^{j2\pi(\frac{1-k}{N})}}$$

$$X_s[jk\omega_p] = \begin{cases} e^{j\varphi_0}/T_s & k = \dots, -2N+1, -N+1, 1, N+1, 2N+1, \dots \\ 0 & \text{za ostale } k \end{cases}$$

$$X_s^*[jk\omega_p] = \begin{cases} e^{-j\varphi_0}/T_s & k = \dots, -2N-1, -N-1, -1, N-1, 2N-1, \dots \\ 0 & \text{za ostale } k \end{cases}$$

Ne postoji preklapanje spektralnih linija

Imamo „tačne“ informacije i o amplitudi i o fazi. U bilo kojoj replici.



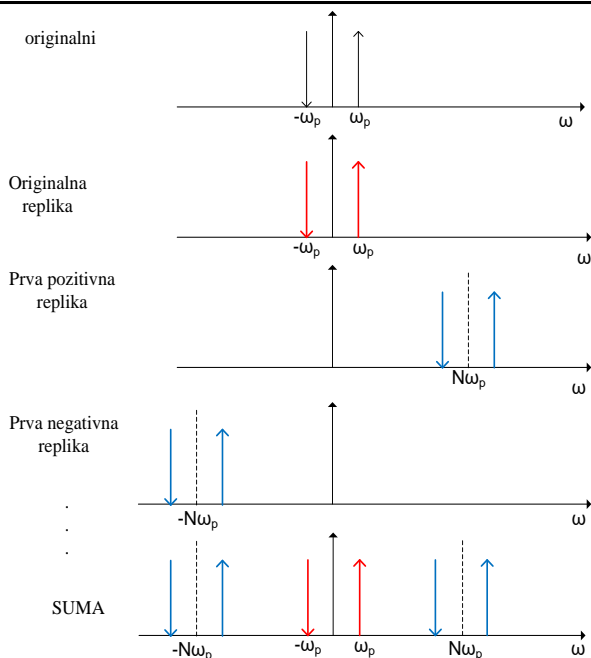
Šta se desilo

$$\omega_s = N\omega_p$$

ZNAČI MORA $N > 2$

U slučaju kada odmerke uzimamo u jednoj periodu $m=1$, mora

$$\omega_s > 2\omega_p$$



Uočite nešto

Ako uzmemo samo spektralne linije u osnovnom delu spektra i na osnovu njih rekonstruišemo signal $A=1$

$$x_{rp}(t) = \frac{1}{2} \frac{e^{-j\varphi_0}}{T_s} e^{-j\omega_p t} + \frac{1}{2} \frac{e^{j\varphi_0}}{T_s} e^{j\omega_p t} = \frac{1}{T_s} \cos(\omega_p t + \varphi_0)$$

Ali isto tako

$$x_{rp}(t) = \sum_{k=-1}^1 \left(\frac{1}{T_p} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(nT_s) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \right) e^{jk\omega_p t}$$

$$x_{rp}(t) = \frac{1}{T_p} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(nT_s) e^{j\frac{2\pi}{N}n} e^{-j\omega_p t} + \frac{1}{T_p} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(nT_s) e^{-j\frac{2\pi}{N}n} e^{j\omega_p t}$$

$$x_{rp}(t) = \frac{2}{T_p} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(nT_s) \cos\left(\omega_p t - \frac{2\pi}{N}n\right)$$

Pomoću odmeraka moguće je rekonstruisati originalni signal. Jednoznačno je određen.

Proverite da li je
$$\frac{1}{T_s} \cos(\omega_p t + \varphi_0) = \frac{2}{T_p} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(nT_s) \cos\left(\omega_p t - \frac{2\pi}{N}n\right)$$



Da li je jednako?

$$x(t) = \cos(\omega_p t + \varphi_0) \quad x_r(t) = \frac{2}{T_p} \sum_{i=0}^{N-1} x(iT_s) \cos(\omega_p(t - iT_s))$$

Na puno različitih načina može da se pokaže

$$x_r(t) = \frac{2}{NT_s} \sum_{i=0}^{N-1} x(iT_s) \cos(\omega_p(t - iT_s))$$

$$x_r(t) = \frac{2}{NT_s} \sum_{i=0}^{N-1} \cos(\omega_p iT_s + \varphi_0) \cos(\omega_p(t - iT_s))$$

$$x_r(t) = \frac{2}{NT_s} \sum_{i=0}^{N-1} \cos(\omega_p iT_s + \varphi_0) \cos(\omega_p(t - iT_s))$$

$$x_r(t) = \frac{2}{NT_s} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left(\cos(\omega_p iT_s + \varphi_0 + \omega_p(t - iT_s)) + \cos(\omega_p iT_s + \varphi_0 - \omega_p(t - iT_s)) \right)$$

$$x_r(t) = \frac{1}{NT_s} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\cos(\omega_p t + \varphi_0) + \cos(2\omega_p iT_s + \varphi_0 - \omega_p t) \right) = \frac{1}{T_s} \cos(\omega_p t + \varphi_0) + \frac{1}{NT_s} \sum_{i=0}^{N-1} \cos\left(\frac{4\pi}{N}i + \varphi_0 - \omega_p t\right)$$

0



ČETVRTI SLUČAJ
UZIMAMO $N > 2$ ODMERAKA ali u više perioda

$$N\omega_p = m\omega_s$$

Koherentno odabiranje, N i m uzajamno prosti brojevi, $\omega_s > 2\omega_p$

$$X_s \left[jk \left(\frac{\omega_p}{m} \right) \right] = \frac{1}{mT_p} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n \left(\frac{m-k}{N} \right)} e^{j\varphi_0} = \frac{e^{j\varphi_0}}{mT_p} \cdot \frac{1 - \left(e^{j2\pi \left(\frac{m-k}{N} \right)} \right)^N}{1 - e^{j2\pi \left(\frac{m-k}{N} \right)}} = \frac{e^{j\varphi_0}}{mT_p} \cdot \frac{1 - e^{j2\pi(m-k)}}{1 - e^{j2\pi \left(\frac{m-k}{N} \right)}}$$

$$X_s \left[jk \left(\frac{\omega_p}{m} \right) \right] = \begin{cases} e^{j\varphi_0}/T_s & k = \dots, -2N + m, -N + m, m, N + m, 2N + m, \dots \\ 0 & \text{za ostale } k \end{cases}$$

$$X_s^* \left[jk \left(\frac{\omega_p}{m} \right) \right] = \begin{cases} e^{-j\varphi_0}/T_s & k = \dots, -2N - m, -N - m, -m, N - m, 2N - m, \dots \\ 0 & \text{za ostale } k \end{cases}$$

Ne postoji preklapanje spektralnih linija

Imamo „tačne“ informacije i o amplitudi i o fazi. U bilo kojoj replici.



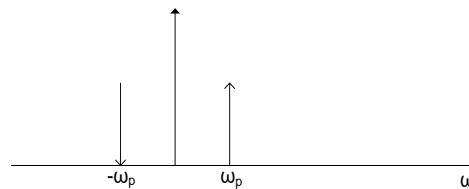
Šta se desilo

$$m\omega_s = N\omega_p$$

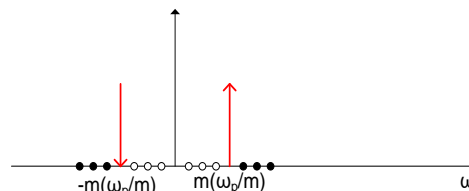
$$\omega_s = \frac{N\omega_p}{m} > 2\omega_p$$

$$\frac{N}{m} > 2$$

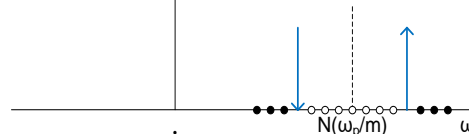
originalni



Originalna replika na m -toj poziciji



Prva pozitivna replika



PETI SLUČAJ - DA LI BAŠ MORA $\omega_s > 2\omega_p$
UZIMAMO $N > 2$ ODMERAKA ali u više perioda

$$N\omega_p = m\omega_s$$

Koherentno odabiranje, N i m uzajamno prosti brojevi, ali $\omega_s < 2\omega_p$

Ništa se nije promenilo?

$$X_s \left[jk \left(\frac{\omega_p}{m} \right) \right] = \frac{1}{mT_p} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n \left(\frac{m-k}{N} \right)} e^{j\varphi_0} = \frac{e^{j\varphi_0}}{mT_p} \cdot \frac{1 - \left(e^{j2\pi \left(\frac{m-k}{N} \right)} \right)^N}{1 - e^{j2\pi \left(\frac{m-k}{N} \right)}} = \frac{e^{j\varphi_0}}{mT_p} \cdot \frac{1 - e^{j2\pi(m-k)}}{1 - e^{j2\pi \left(\frac{m-k}{N} \right)}} \quad \checkmark$$

$$X_s \left[jk \left(\frac{\omega_p}{m} \right) \right] = \begin{cases} e^{j\varphi_0}/T_s & k = \dots, -2N + m, -N + m, m, N + m, 2N + m, \dots \\ 0 & \text{za ostale } k \end{cases} \quad \checkmark$$

$$X_s^* \left[jk \left(\frac{\omega_p}{m} \right) \right] = \begin{cases} e^{-j\varphi_0}/T_s & k = \dots, -2N - m, -N - m, -m, N - m, 2N - m, \dots \\ 0 & \text{za ostale } k \end{cases} \quad \checkmark$$

Ne postoji preklapanje spektralnih linija \checkmark

Imamo „tačne“ informacije i o amplitudi i o fazi. U bilo kojoj replici. \checkmark



Imamo tačne informacije pod uslovom da nema „preklapanja“

Preklapanja neće biti ako ne postoje celi brojevi l i k takvi da je moguća jednakost

$$lN \pm m = kN \pm m$$

$$lN + m = kN + m \quad lN - m = kN - m \quad lN + m = kN - m \Rightarrow m = N \frac{k-l}{2} \quad lN - m = kN + m \Rightarrow m = N \frac{l-k}{2}$$

Nije moguće ako su m i N uzajamno prosti brojevi

Znači bitno je koliko odmeraka N uzimamo a

$$\omega_s = \frac{N}{m} \omega_p$$

može biti izborom m i

$$\omega_s < \omega_p$$

a da ipak imamo „tačne“ informacije.

PODODABIRANJE - UNDERSAMPLING



Šta se desilo

$$m\omega_s = N\omega_p$$

$$\omega_s = \frac{N\omega_p}{m} < 2\omega_p$$

$$\frac{N}{m} < 2$$

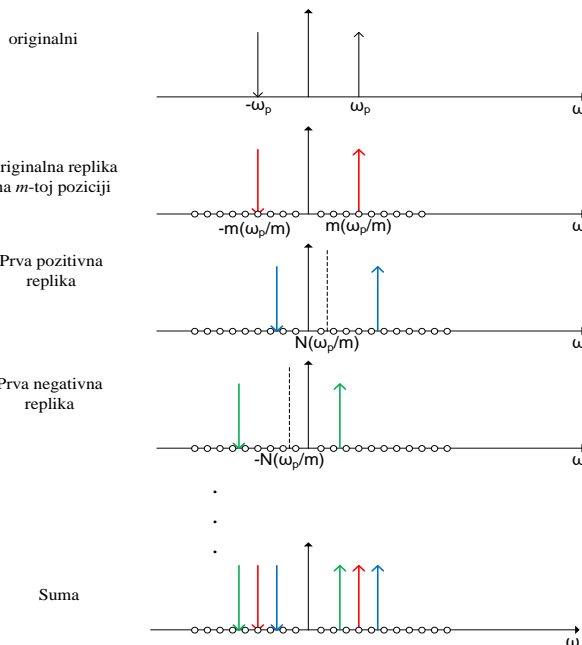
Informacija znači postoji i u
harmonicima najbližim ordinati $\omega = 0$



Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

Digitalna obrada signala - 2022/23

67



67

PODODABIRANJE

$$N=3, m=5$$

$$\omega_s = \frac{3}{5}\omega_p$$

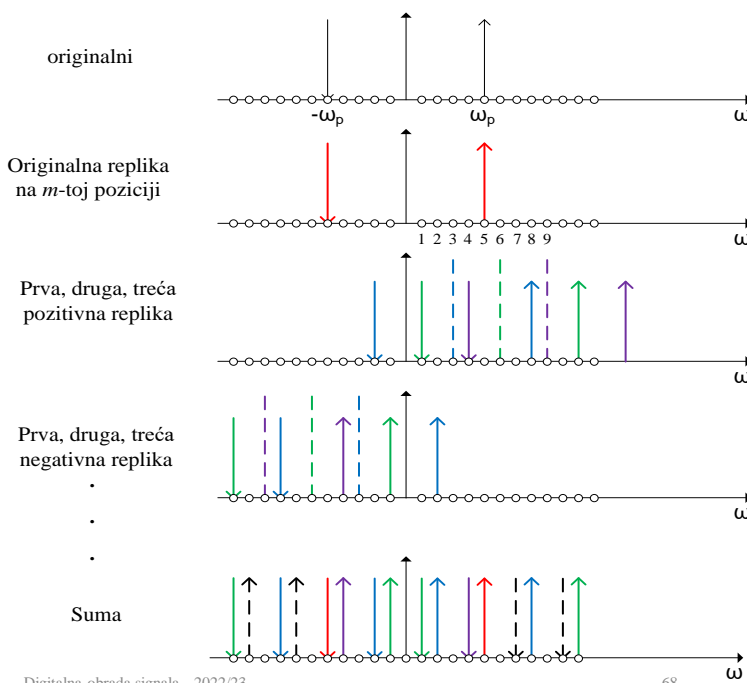
Svesni šta se radi i gde se očekuje spektar



Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

Digitalna obrada signala - 2022/23

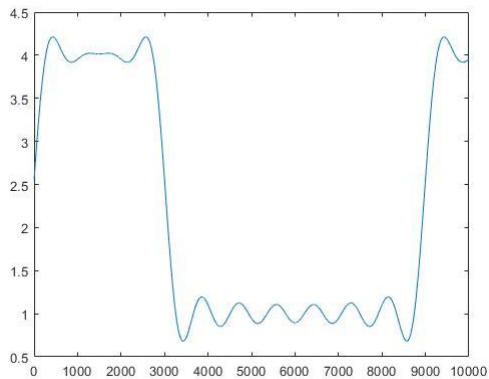
68



68

Sve što smo izveli važi i za periodičan signal koji ima više harmonijskih komponenti.
Uslovi da nema preklapanja spektara odnose se na harmonijsku komponentu sa najvišom učestanošću

Broj komponenti 10.



Ukupan broj tačaka u kojima je signal nacrtan je 10000. To znači da je najviša harmonijska komponenta zastupljena sa oko 1000 tačaka.

Teorema odabiranja je zadovoljena.

Nema artefakata nastalih od eventualnog preklapanja spektara.

Slika je korektna.



Furijeova transformacija



A šta sa aperiodičnim signalima?

CTFT – Continuous Time Fourier Transform

Ako je $x(t)$ aperiodična funkcija onda CTFT = CTFS $\rightarrow (t \rightarrow \infty)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$X(j\omega)$ Kompleksna veličina

CTFS - signal neograničen u vremenu
 - spektar linijski i može biti i ograničen i neograničen u frekvencijskom domenu

CTFT - signal može biti i ograničen i neograničen u vremenu
 - spektar kontinualan i može biti i ograničen i neograničen u frekvencijskom domenu



Da li je ovo apsolutno novo i da li postoji veza?

CTFS \longleftrightarrow CTFT

Periodičan signal $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[jk\omega_0]e^{jk\omega_0 t}$ transformacija

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[jk\omega_0]e^{jk\omega_0 t} \right) e^{-j\omega t} dt$$

Neka je spektar nekog „aperiodičnog“ signala
 $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$

Rekonstrukcija tog signala je
 $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$

$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)e^{j\omega t} d\omega = e^{jk\omega_0 t}$

Znači Furijeova transformacija signala $e^{jk\omega_0 t}$
 jednaka je $2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[jk\omega_0] \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt$$

Kako izračunati?
 Šta je ovo?
 Furijeova transformacija čega?

$$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[jk\omega_0] \delta(\omega - k\omega_0) \quad \text{Veza}$$



Digresija:

U većini, praktično kod svih realnih, slučajeva smemo da radimo zamenu redosleda sumiranja i-ili sumiranja i integrala pošto su sume konvergentne



PARSEVALOVA TEOREMA ZA CTFT

CTFT – energije su jednake u vremenskom i frekvencijskom domenu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

NAPOMENA: srednja snaga na beskonačnom intervalu je nula



Periodični signali

1. Mogu imati beskonačno mnogo spektralnih linija. Beskonačan spektar.

Moguće koherentno odabiranje.

Preklapanje spektara postoji prilikom odabiranja.

2. Ako je spektar ograničen, odnosno ima konačno mnogo spektralnih linija do učestanosti ω_g , moguće je koherentno odabiranje. Potrebno je obezbediti više od 2 tačke odabiranja u harmoniku najviše učestanosti, odnosno

$$\omega_s > 2\omega_g$$

Aperiodični signali

1. Spektar kontinualan. Beskonačno mnogo harmonika. Može biti beskonačan.

Principski nije moguće koherentno odabiranje.

Preklapanje spektara postoji prilikom odabiranja.

2. Ako je spektar ograničen do učestanosti ω_g , potrebno je obezbediti više od 2 tačke odabiranja u harmoniku najviše učestanosti, odnosno

$$\omega_s > 2\omega_g$$



Rekonstrukcija signala na osnovu spektra



Teorema odabiranja + rekonstrukcija signala iz odmeraka

Odabiranje signala $x(t)$

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

Spektar CTFT odabranog signala

$$X_s(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \right) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x(t) \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_s t} \right) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

Već videli kod periodičnih signala. Sada opšte za bilo kakav signal.
Proces odabiranja pravi periodičnost spektra.

Digresija: Razvoj periodične povorke delta impulsa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_s t}$$

Šta bi sa Parsevalovom teoremom?



Teorema odabiranja + rekonstrukcija signala iz odmeraka

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

Idealnim filtrom uzimamo samo osnovni deo spektra $Y_r(j\omega) = X_s(j\omega)H(j\omega)$

$$H(j\omega) = ? \quad H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_g \\ 0 & |\omega| > \omega_g \end{cases} \Rightarrow h(t) = \mathcal{F}^{-1}(H(j\omega)) = \frac{\sin(\omega_g t)}{\pi t}$$

Množenje u frekvencijskom = konvolucija u vremenskom

$$x_r(t) = x_s(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) h(t - nT_s)$$

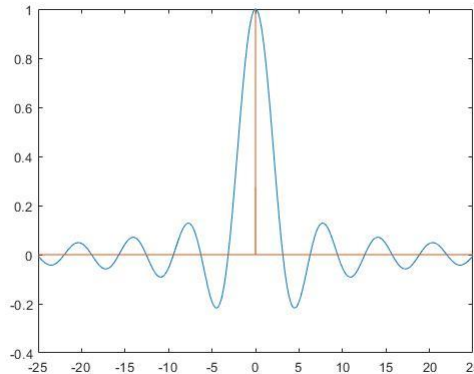
$$x_r(t) = \frac{\omega_g}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \frac{\sin(\omega_g(t - nT_s))}{\omega_g(t - nT_s)} = \frac{\omega_g}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \text{sinc}(\omega_g(t - nT_s))$$



$$x_r(t) = \frac{\omega_g}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \frac{\sin(\omega_g(t - nT_s))}{\omega_g(t - nT_s)} = \frac{\omega_g}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \text{sinc}(\omega_g(t - nT_s))$$

sinc
interpolaciona funkcija

Sinc funkcija
Nule u tačkama $k\pi$,
Osim za $k = 0$, gde ima vrednost 1



Lako pokazati

$$x_r(nT_s) = \frac{\omega_g}{\pi} x(nT_s)$$

a ako je

$$\omega_g = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T_s}$$

$$x_r(nT_s) = \frac{1}{T_s} x(nT_s)$$

Moguća je egzaktna rekonstrukcija kontinualnog signala iz njegovih odbiraka.

Uslov: frekvencijski ograničen signal i učestanost odabiranja $\omega_s \geq 2\omega_g$.

Napomena: Na ω_g spektar jednak nuli. Kako se već definiše ω_g . $\omega_s > 2\omega_g$ ili $\omega_s \geq 2\omega_g$

Samo teorijski moguće pošto nema idealnog NF filtra.



Malo uobičajenih matematičkih igranja

Rekonstrukcija prostoperiodičnog signala

$$x(t) = \cos(\omega_p t + \varphi_0)$$

je

$$x_{rp}(t) = \frac{2}{T_p} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(nT_s) \cos\left(\omega_p t - \frac{2\pi}{N} n\right)$$

Rekonstrukcija aperioidičnog signala

$$x_r(t) = \frac{\omega_g}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \frac{\sin(\omega_g(t - nT_s))}{\omega_g(t - nT_s)} = \frac{\omega_g}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \text{sinc}(\omega_g(t - nT_s))$$

Da li je ovo isto ako bi u drugom slučaju smatrali da je signal ipak prostoperiodičan i da je

$$\omega_g = \omega_p$$

$$NT_s = T_p$$



$$x_r(t) = \frac{\omega_g}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \frac{\sin(\omega_p(t - nT_s))}{\omega_g(t - nT_s)} = \frac{2}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \frac{\sin(\omega_p(t - nT_s))}{\omega_p(t - nT_s)}$$

Zbog periodičnosti $x(nT_s) = x(nT_s + N)$

$$x_r(t) = \frac{2}{T_p} \sum_{i=0}^{N-1} x(iT_s) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega_p(t - (i + nN)T_s))}{\omega_p(t - (i + nN)T_s)}$$

Kako je
$$\frac{\sin(\omega_p(t - (i + nN)T_s))}{\omega_p(t - (i + nN)T_s)} = \frac{1}{2\omega_p} \int_{-\omega_p}^{+\omega_p} e^{-j((i+nN)T_s)\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

Inverzna Furijeova transformacija pravouganog oblika frekvencijske karakteristike



$$x_r(t) = \frac{2}{T_p} \sum_{i=0}^{N-1} x(iT_s) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\omega_p} \int_{-\omega_p}^{+\omega_p} e^{-j((i+nN)T_s)\omega} e^{j\omega t} d\omega \right)$$

$$x_r(t) = \frac{2}{T_p} \sum_{i=0}^{N-1} x(iT_s) \frac{1}{2\omega_p} \int_{-\omega_p}^{+\omega_p} e^{-j(iT_s)\omega} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j(nNT_s)\omega} \right) e^{j\omega t} d\omega$$

$$x_r(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{N-1} x(iT_s) \int_{-\omega_p}^{+\omega_p} e^{-j(iT_s)\omega} \left(\frac{2\pi}{NT_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - m \frac{2\pi}{NT_s}\right) \right) e^{j\omega t} d\omega$$

$$x_r(t) = \frac{1}{NT_s} \sum_{i=0}^{N-1} x(iT_s) \int_{-\omega_p}^{+\omega_p} e^{-j(iT_s)\omega} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - m\omega_p) \right) e^{j\omega t} d\omega$$

$$x_r(t) = \frac{2}{NT_s} \sum_{i=0}^{N-1} x(iT_s) \cos(\omega_p(t - iT_s))$$

$$x_r(t) = \frac{2}{T_p} \sum_{i=0}^{N-1} x(iT_s) \cos\left(\omega_p t - i \frac{2\pi}{N}\right)$$

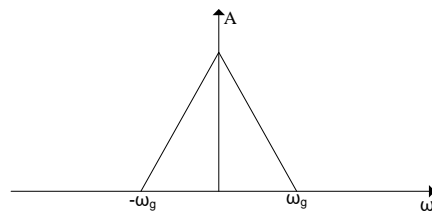


Preklapanje spektara

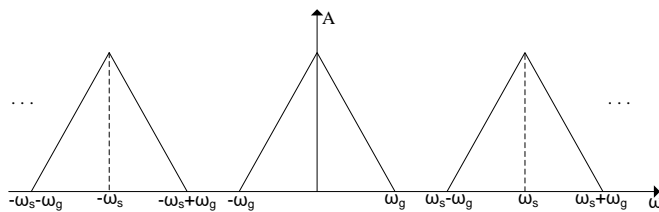


83

Bez obzira na tip signala ako je najviša učestanost u spektru ω_g

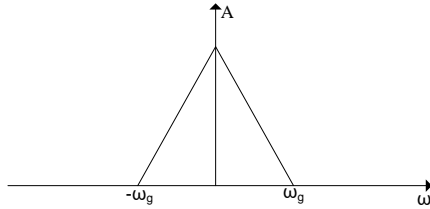


Odabiranje $\omega_s > 2\omega_g$

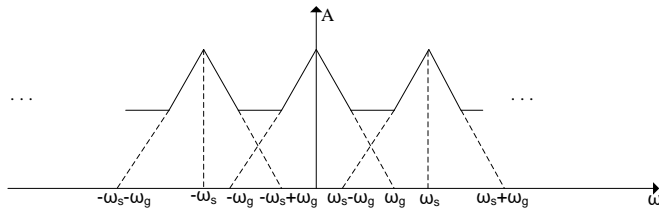


84

Preklapanje spektara - ALIASING



Odobiranje $\omega_s < 2\omega_p$



ANTI-ALIASING FILTER – da bi se sprečila, smanjila, pojava preklapanja spektara
 Ne postoji idealan NF filter koji će „anulirati“ komponente visokih učestanosti.
 Znači $\omega_{pNF} \ll \omega_s$
 Pojava „uvek postoji“ ali može da se zanemari.



Katedra za elektroniku
 prof dr Lazar Saranovac

Digitalna obrada signala - 2022/23

85

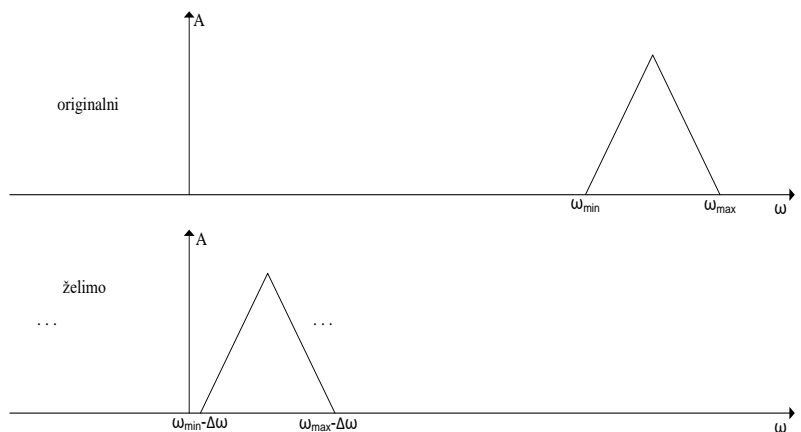
85

Da li je moguće izabrati „nisku“ učestanost odabiranja a da ne bude preklapanje spektara?
 Pododabiranje – undersampling. Kolika je učestanost odabiranja?

$$\frac{2\omega_{max}}{n} \leq \omega_s \leq \frac{2\omega_{min}}{n-1}$$

$$1 \leq n \leq \left\lfloor \frac{\omega_{max}}{\omega_{max} - \omega_{min}} \right\rfloor$$

Najveće n koje zadovoljava nejednakost
 vodi ka najnižoj učestanosti odabiranja



Antialiasing filter – filter propusnik opsega učestanosti



Katedra za elektroniku
 prof dr Lazar Saranovac

Digitalna obrada signala - 2022/23

86

86

Uočite nešto

Ne postoji situacija u kojoj su signali ograničeni i u vremenskom i u frekvencijskom domenu!

Signal ograničen u vremenu – beskonačan spektar.

Spektar ograničen u frekvencijskom domenu – beskonačno trajanje signala.

Može postojati situacija beskonačnog trajanja i beskonačnog spektra. Videli na primeru pravougaonog periodičnog impulsa.

Neka je spektar signala konačnog trajanja $x(t)$, u vremenu od t_1 do t_2 , jednak $X(j\omega)$ i ograničen učestanošću ω_g .

Množenjem u frekvencijskom domenu spektra sa funkcijom

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_g \\ 0 & |\omega| > \omega_g \end{cases} \Rightarrow h(t) = \mathcal{F}^{-1}(H(j\omega)) = \frac{\sin(\omega_g t)}{\pi t}$$

ne menja se spektar. Množenje u frekvenciskom, konvolucija u vremenskom.

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(X(j\omega)H(j\omega)) = x(t) * \frac{\omega_g}{\pi} \text{sinc}(\omega_g t) = \frac{\omega_g}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \text{sinc}(\omega_g(t - \tau)) d\tau = \frac{\omega_g}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} x(\tau) \cdot \text{sinc}(\omega_g(t - \tau)) d\tau$$

Levo - pretpostavka konačno u vremenu

Desno – beskonačno u vremenu zbog beskonačnog trajanja sinc funkcije. Bez obzira koliko je t u konvolucionom integralu, u intervalu t_1 do t_2 uvek postoji vrednost sinc funkcije.



Primer odabiranja aperiodičnog signala

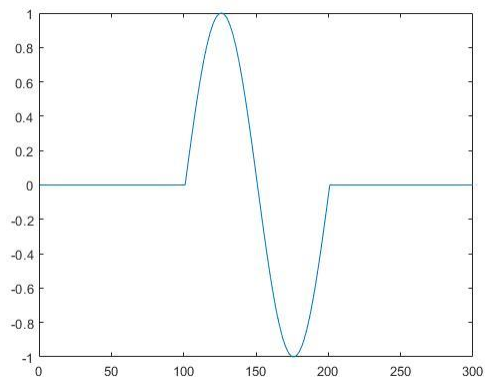


Principski nije moguće koherentno odabiranje kod aperioidičnih signala?

Aperioidičan signal – pojavila se samo jedna perioda prostoperiodičnog signala.

Naći spektar originalnog signala.

Naći spektar odabranog signala učestanošću $\omega_s = r\omega_p = \frac{r \cdot 2\pi}{T_p}$ $r \in \mathbb{R}$



Do sada radili sa cosx,
neće biti drugačije ni sa sinx

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \int_0^{T_p} \frac{e^{j(\omega_p t)} - e^{-j(\omega_p t)}}{2j} e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2j} \left(\frac{e^{j(\omega_p - \omega)T_p} - 1}{j(\omega_p - \omega)} - \frac{e^{-j(\omega_p + \omega)T_p} - 1}{-j(\omega_p + \omega)} \right)$$

$$X(j\omega) = \frac{T_p}{2j} \left(e^{j(\omega_p - \omega)\frac{T_p}{2}} \cdot \frac{e^{j(\omega_p - \omega)\frac{T_p}{2}} - e^{-j(\omega_p - \omega)\frac{T_p}{2}}}{j(\omega_p - \omega)\frac{T_p}{2}} - e^{-j(\omega_p + \omega)\frac{T_p}{2}} \cdot \frac{e^{-j(\omega_p + \omega)\frac{T_p}{2}} - e^{+j(\omega_p + \omega)\frac{T_p}{2}}}{-j(\omega_p + \omega)\frac{T_p}{2}} \right)$$

$$X(j\omega) = \frac{T_p}{2j} \cdot e^{j(\omega_p - \omega)\frac{T_p}{2}} \cdot \text{sinc}\left(\left(\omega_p - \omega\right)\frac{T_p}{2}\right) - \frac{T_p}{2j} \cdot e^{-j(\omega_p + \omega)\frac{T_p}{2}} \cdot \text{sinc}\left(\left(\omega_p + \omega\right)\frac{T_p}{2}\right)$$



$$X(j\omega) = \frac{T_p}{2j} \cdot e^{j(\omega_p - \omega)\frac{T_p}{2}} \cdot \text{sinc}\left((\omega_p - \omega)\frac{T_p}{2}\right) - \frac{T_p}{2j} \cdot e^{-j(\omega_p + \omega)\frac{T_p}{2}} \cdot \text{sinc}\left((\omega_p + \omega)\frac{T_p}{2}\right)$$

Beskonačan spektar ali

$$X(j\omega_p) = \frac{T_p}{2j} \quad \text{i} \quad X(-j\omega_p) = -\frac{T_p}{2j}$$

Da vas ne zbuni, računali smo za sinusoidalni signal sa početnim faznim stavom 0.

A „učili“ smo kod realnih signala

$$\varphi_{X(-j\omega_p)} = -\varphi_{X(j\omega_p)}$$

I ovde je

$$\varphi_{X(-j\omega_p)} = -\varphi_{X(j\omega_p)} = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$X(j\omega_p) = \frac{T_p}{2j} = \frac{T_p}{2e^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{T_p}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$X(-j\omega_p) = -\frac{T_p}{2j} = e^{j\frac{\pi}{2}} \frac{T_p}{2e^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{T_p}{2} e^{j\frac{\pi}{2}}$$



Odabiranje

$$\omega_s = r\omega_p = \frac{r \cdot 2\pi}{T_p} \quad r \in R$$

Odabrali N tačaka $N = \lfloor r \rfloor$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \int_0^{T_p} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{e^{j(\omega_p t)} - e^{-j(\omega_p t)}}{2j} \delta(t - nT_s) \right) \right) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_0^{T_p} \frac{e^{j(\omega_p - \omega)t} - e^{-j(\omega_p + \omega)t}}{2j} \delta(t - nT_s) dt \right)$$

$$X(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{j(\omega_p - \omega)nT_s} - e^{-j(\omega_p + \omega)nT_s}}{2j}$$



$$X(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{j(\omega_p - \omega)nT_s} - e^{-j(\omega_p + \omega)nT_s}}{2j}$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1 - e^{j(\omega_p - \omega)NT_s}}{1 - e^{j(\omega_p - \omega)T_s}} - \frac{1 - e^{-j(\omega_p + \omega)NT_s}}{1 - e^{-j(\omega_p + \omega)T_s}} \right)$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2j} \left(\frac{e^{j(\omega_p - \omega)\frac{NT_s}{2}} \cdot e^{-j(\omega_p - \omega)\frac{NT_s}{2}} - e^{j(\omega_p - \omega)\frac{NT_s}{2}} \cdot e^{-j(\omega_p - \omega)\frac{NT_s}{2}}}{e^{j(\omega_p - \omega)\frac{T_s}{2}} - e^{-j(\omega_p - \omega)\frac{T_s}{2}}} - \frac{e^{-j(\omega_p + \omega)\frac{NT_s}{2}} \cdot e^{j(\omega_p + \omega)\frac{NT_s}{2}} - e^{-j(\omega_p + \omega)\frac{NT_s}{2}} \cdot e^{j(\omega_p + \omega)\frac{NT_s}{2}}}{e^{-j(\omega_p + \omega)\frac{T_s}{2}} - e^{j(\omega_p + \omega)\frac{T_s}{2}}} \right)$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2j} \left(e^{j(\omega_p - \omega)\frac{(N-1)T_s}{2}} \cdot \frac{\sin\left((\omega_p - \omega)\frac{NT_s}{2}\right)}{\sin\left((\omega_p - \omega)\frac{T_s}{2}\right)} - e^{-j(\omega_p + \omega)\frac{(N-1)T_s}{2}} \cdot \frac{\sin\left((\omega_p + \omega)\frac{NT_s}{2}\right)}{\sin\left((\omega_p + \omega)\frac{T_s}{2}\right)} \right)$$



Da malo sredimo

$$X(j\omega) = \frac{T_p}{2j} \cdot e^{j(\omega_p - \omega)\frac{T_p}{2}} \cdot \text{sinc}\left((\omega_p - \omega)\frac{T_p}{2}\right) - \frac{T_p}{2j} \cdot e^{-j(\omega_p + \omega)\frac{T_p}{2}} \cdot \text{sinc}\left((\omega_p + \omega)\frac{T_p}{2}\right)$$

$$X(j\omega) = \frac{\pi}{j\omega_p} \cdot e^{j(\omega_p - \omega)\frac{\pi}{\omega_p}} \cdot \text{sinc}\left((\omega_p - \omega)\frac{\pi}{\omega_p}\right) - \frac{\pi}{j\omega_p} \cdot e^{-j(\omega_p + \omega)\frac{\pi}{\omega_p}} \cdot \text{sinc}\left((\omega_p + \omega)\frac{\pi}{\omega_p}\right)$$

Da malo sredimo

$$X(j\omega) = \frac{1}{2j} \left(e^{j(\omega_p - \omega)\frac{(N-1)T_s}{2}} \cdot \frac{\sin\left((\omega_p - \omega)\frac{NT_s}{2}\right)}{\sin\left((\omega_p - \omega)\frac{T_s}{2}\right)} - e^{-j(\omega_p + \omega)\frac{(N-1)T_s}{2}} \cdot \frac{\sin\left((\omega_p + \omega)\frac{NT_s}{2}\right)}{\sin\left((\omega_p + \omega)\frac{T_s}{2}\right)} \right)$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2j} e^{j(\omega_p - \omega)(N-1)\frac{\pi}{r\omega_p}} \cdot \frac{\sin\left((\omega_p - \omega)N\frac{\pi}{r\omega_p}\right)}{\sin\left((\omega_p - \omega)\frac{\pi}{r\omega_p}\right)} - \frac{1}{2j} e^{-j(\omega_p + \omega)(N-1)\frac{\pi}{r\omega_p}} \cdot \frac{\sin\left((\omega_p + \omega)\frac{\pi}{r\omega_p}\right)}{\sin\left((\omega_p + \omega)\frac{\pi}{r\omega_p}\right)}$$

$$X(j\omega) = \frac{N}{2j} e^{j(\omega_p - \omega)(N-1)\frac{\pi}{r\omega_p}} \cdot \frac{\text{sinc}\left((\omega_p - \omega)N\frac{\pi}{r\omega_p}\right)}{\text{sinc}\left((\omega_p - \omega)\frac{\pi}{r\omega_p}\right)} - \frac{N}{2j} e^{-j(\omega_p + \omega)(N-1)\frac{\pi}{r\omega_p}} \cdot \frac{\text{sinc}\left((\omega_p + \omega)\frac{\pi}{r\omega_p}\right)}{\text{sinc}\left((\omega_p + \omega)\frac{\pi}{r\omega_p}\right)}$$



Ponovo

$$X(j\omega) = \frac{\pi}{j\omega_p} \cdot e^{j(\omega_p - \omega)\frac{\pi}{\omega_p}} \cdot \text{sinc}\left(\left(\omega_p - \omega\right)\frac{\pi}{\omega_p}\right) - \frac{\pi}{j\omega_p} \cdot e^{-j(\omega_p + \omega)\frac{\pi}{\omega_p}} \cdot \text{sinc}\left(\left(\omega_p + \omega\right)\frac{\pi}{\omega_p}\right)$$

$$X(j\omega) = \frac{N}{2j} e^{j(\omega_p - \omega)(N-1)\frac{\pi}{r\omega_p}} \cdot \frac{\text{sinc}\left(\left(\omega_p - \omega\right)\frac{N\pi}{r\omega_p}\right)}{\text{sinc}\left(\left(\omega_p - \omega\right)\frac{\pi}{r\omega_p}\right)} - \frac{N}{2j} e^{-j(\omega_p + \omega)(N-1)\frac{\pi}{r\omega_p}} \cdot \frac{\text{sinc}\left(\left(\omega_p + \omega\right)\frac{\pi}{r\omega_p}\right)}{\text{sinc}\left(\left(\omega_p + \omega\right)\frac{\pi}{r\omega_p}\right)}$$

Nejednakost spektara

- crveni spektar je beskonačan
- odabiranje vodi ka preklapanju spektara
- plavi spektar je takođe beskonačan i periodično ponovljen



$$X(j\omega) = \frac{\pi}{j\omega_p} \cdot e^{j(\omega_p - \omega)\frac{\pi}{\omega_p}} \cdot \text{sinc}\left(\left(\omega_p - \omega\right)\frac{\pi}{\omega_p}\right) - \frac{\pi}{j\omega_p} \cdot e^{-j(\omega_p + \omega)\frac{\pi}{\omega_p}} \cdot \text{sinc}\left(\left(\omega_p + \omega\right)\frac{\pi}{\omega_p}\right)$$

Na učestanosti $\omega = k\omega_p$ $k \in Z$ i $k \neq 1$ spektar jednak 0.

Da bi očuvali prilikom preklapanja spektara harmonijsku komponentu na osnovnoj učestanosti sa $\omega_s = r\omega_p$ mora i $r \in Z$, kao i da ostanu 0 na $k\omega_p$

To se vidi i iz

$$X(j\omega) = \frac{N}{2j} e^{j(\omega_p - \omega)(N-1)\frac{\pi}{r\omega_p}} \cdot \frac{\text{sinc}\left(\left(\omega_p - \omega\right)\frac{N\pi}{r\omega_p}\right)}{\text{sinc}\left(\left(\omega_p - \omega\right)\frac{\pi}{r\omega_p}\right)} - \frac{N}{2j} e^{-j(\omega_p + \omega)(N-1)\frac{\pi}{r\omega_p}} \cdot \frac{\text{sinc}\left(\left(\omega_p + \omega\right)\frac{\pi}{r\omega_p}\right)}{\text{sinc}\left(\left(\omega_p + \omega\right)\frac{\pi}{r\omega_p}\right)}$$

Da bi na učestanostima $k\omega = k\omega_p$ i $k \neq \pm 1$ spektar odabranog signala bio 0

mora $r = N$ odnosno r mora biti ceo broj odnosno mora biti „koherentno odmeravanje“. A ako jeste

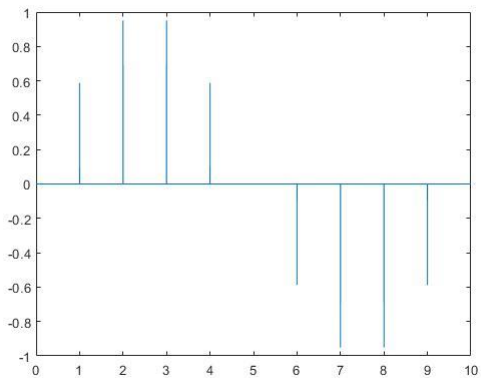
$$X(j\omega) = \frac{1}{T_s} \frac{\pi}{j\omega_p} e^{j(\omega_p - \omega)(N-1)\frac{\pi}{N\omega_p}} \cdot \frac{\text{sinc}\left(\left(\omega_p - \omega\right)\frac{\pi}{\omega_p}\right)}{\text{sinc}\left(\left(\omega_p - \omega\right)\frac{\pi}{N\omega_p}\right)} - \frac{1}{T_s} \frac{\pi}{j\omega_p} e^{-j(\omega_p + \omega)(N-1)\frac{\pi}{N\omega_p}} \cdot \frac{\text{sinc}\left(\left(\omega_p + \omega\right)\frac{\pi}{\omega_p}\right)}{\text{sinc}\left(\left(\omega_p + \omega\right)\frac{\pi}{N\omega_p}\right)}$$



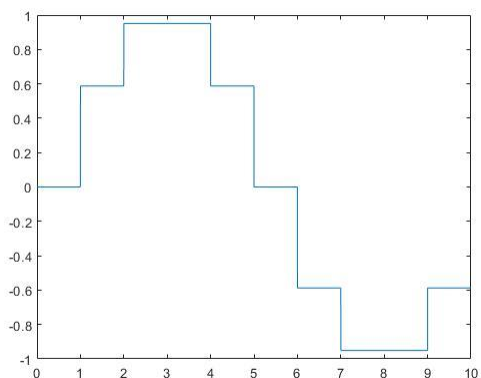
Realna rekonstrukcija signala



Nema delta impulsa u prirodi.



Realna rekonstrukcija DA konvertorom.



Zero order hold



$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad \text{Idealnim filtrom} \quad x_r(t) = \frac{\omega_g}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \text{sinc}(\omega_g(t - nT_s))$$

$$x_{\text{zoh}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)h_0(t - nT_s) \quad h_0(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T_s \\ 0 & t < 0 \text{ i } t > T_s \end{cases}$$

$$X_{\text{zoh}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)h_0(t - nT_s) \right) e^{-j\omega t} dt$$

$$X_{\text{zoh}}(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(nT_s)h_0(t - nT_s)e^{-j\omega t} dt \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x(nT_s) \int_{nT_s}^{(n+1)T_s} e^{-j\omega t} dt \right)$$

$$X_{\text{zoh}}(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)e^{-j\omega nT_s} \cdot \frac{e^{-j\omega T_s} - 1}{-j\omega} = e^{-j\frac{\omega T_s}{2}} \cdot T_s \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)e^{-j\omega nT_s}$$



Uočiti

$$X_{\text{zoh}}(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)e^{-j\omega nT_s} \cdot \frac{e^{-j\omega T_s} - 1}{-j\omega} = e^{-j\frac{\omega T_s}{2}} \cdot T_s \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)e^{-j\omega nT_s}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)e^{-j\omega nT_s} = \mathcal{F}(x_s(t)) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

$$X_{\text{zoh}}(j\omega) = e^{-j\frac{\omega T_s}{2}} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

Umesto idelnog filtra filtriramo sa filtrom čija je karakteristika oblika sinc funkcije

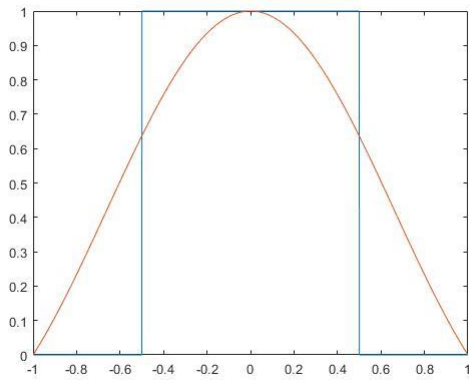
Digresija - do istog rezultata:

$$x_{\text{ZOH}}(t) = h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

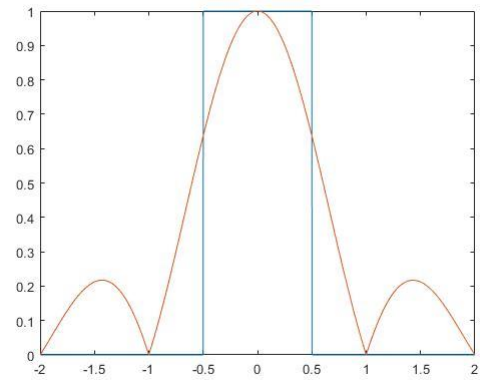
Konvolucija u vremenskom, moženje u frekvencijskom.



Plavo idealan
Crveno kolo zadržke nultog reda



Do ω_s



Do $2\omega_s$

Ni osnovni spektar neće biti reprodukovan kako treba.
U rekonstrukciji učestvuju i replike spektara, VF.
Znači NF filter na izlazu. Analogni.



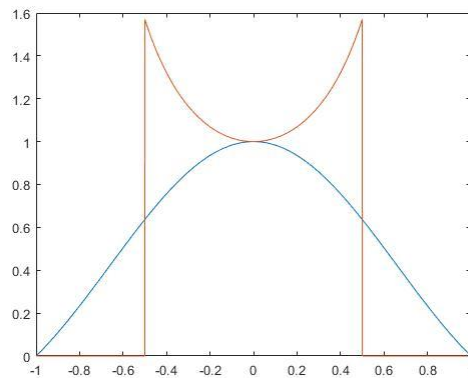
Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

Digitalna obrada signala - 2022/23

101

101

A pre DA konvertora filter u frekvencijskom domenu.
Manipulacija nad spektralnim linijama.



$$|X_{\text{FILT}}(j\omega)| = \frac{1}{\text{sinc}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)} = \begin{cases} \frac{\omega T_s}{2} & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & |\omega| > \omega_s \end{cases}$$



Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

Digitalna obrada signala - 2022/23

102

102

Diskretni signali



Uočiti

Kada smo odabirali prostoperiodičan kompleksan signal

$$X_s \left[jk \left(\frac{\omega_p}{m} \right) \right] = \frac{1}{mT_p} \sum_{n=0}^{N-1} x_{c_p}(nT_s) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{mT_p} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_s n T_s} e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} e^{j\varphi_0} = \frac{1}{mT_p} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} m n} e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} e^{j\varphi_0} = \frac{1}{mT_p} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j 2\pi n \left(\frac{m-k}{N} \right)} e^{j\varphi_0}$$

Izgubila se dimenzija vremena

Za računanje nam treba samo m i N iz $N\omega_p = m\omega_s$

Suštinski: nije nam trebalo ni m . Bitno da je koherentno odmeravanje i da smo dobili periodičan signal odmeravanjem

$$X_s \left[k \left(\frac{\omega_p}{m} \right) \right] = X_s \left[k \left(\frac{\omega_s}{N} \right) \right] = \frac{1}{NT_s} \sum_{n=0}^{N-1} x_{c_p}(nT_s) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \dots$$

Da smo samo ovako računali sa odmercima dobili bi harmonik na učestanosti

$$\omega_p = m \left(\frac{\omega_s}{N} \right)$$

odnosno saznali bi i m

Zbog ovoga za račun sa periodičnim odmercima koristimo **DTFT**



DTFS – Discrete Time Fourier Series

$x[n]$ periodičan diskretan niz sa periodom N i $\Omega_p = \frac{2\pi}{N}$

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x[n] e^{-jn\Omega_p k}$$

Spektar je beskonačan i periodičan sa periodom 2π
Periodičnost i u jednom i u drugom domenu

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{jk\Omega_p n}$$

U opsegu 0 do 2π .
Ako gledamo u opsegu $-\pi$ do π
isti rezultat samo su granice sume drugačije.

Parsevalova teorema

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

Snage su jednake
SAMO U OSNOVNOM OPSEGU HARMONIKA

$$2\pi \Leftrightarrow \omega_s$$

Veza sa realnim svetom

$$\Omega_p = \frac{2\pi}{N}$$

$$X[k] = X[k\Omega_p] = X[jk\Omega_p] \Leftrightarrow X\left[jk\left(\frac{\omega_s}{N}\right)\right]$$

Sada uobičajeno
pisanje $X[k]$



Ono što vas ponekad zbuni je ova periodičnost 2π pošto se to javlja i u

$$\omega = 2\pi f$$

$$X[jk\omega_p] = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-jk\omega_p t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-jk2\pi f_p t} dt = X[jkf_p]$$

Da smo odabirali periodičan signal učestanosti f_0 koherentno sa učestanošću f_s u N tačaka

$$\begin{aligned} X_s \left[k \left(\frac{f_s}{N} \right) \right] &= X_s [k] = \frac{1}{NT_s} \int_{NT_s} x_s(t) e^{-jk2\pi \frac{f_s}{N} t} dt = \frac{1}{NT_s} \int_{NT_s} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x_s(nT_s) \delta(t - nT_s) \right) e^{-jk2\pi \frac{f_s}{N} t} dt \\ &= \frac{1}{NT_s} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{NT_s} x_s(nT_s) \delta(t - nT_s) e^{-jk2\pi \frac{f_s}{N} t} dt \right) = \frac{1}{NT_s} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{NT_s} x_s(nT_s) e^{-jk2\pi \frac{f_s}{N} nT_s} dt \right) \\ &= \frac{1}{NT_s} \sum_{n=0}^{N-1} x_s(nT_s) e^{-jk2\pi \frac{f_s}{N} nT_s} = \frac{1}{NT_s} \sum_{n=0}^{N-1} x_{c_p}(nT_s) e^{-jk2\pi \frac{f_s}{N} n \frac{1}{f_s}} = \frac{1}{NT_s} \sum_{n=0}^{N-1} x_{c_p}(nT_s) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \end{aligned}$$

Isti krajnji izraz



Prema tome veza sa realnim svetom

$$2\pi \Leftrightarrow \omega_s$$

$$\Omega_p = \frac{2\pi}{N}$$

$$X[k] = X[k\Omega_p] \Leftrightarrow X\left[k\left(\frac{\omega_s}{N}\right)\right]$$

ILI

$$2\pi \Leftrightarrow f_s$$

$$F_p = \frac{2\pi}{N}$$

$$X[k] = X[kF_p] \Leftrightarrow X\left[k\left(\frac{f_s}{N}\right)\right]$$

Pimer: Radili sa $f_s = 1 \text{ kHz}$ ($1000 \cdot 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$) u $N = 1000$ tačaka.

Dobili harmonik na $k = 100$ odnosno na $\frac{\pi}{5}$.

Realna učestanost koja tome odgovara $f_r = k \frac{f_s}{N} = 100 \text{ Hz}$ ili $\omega_r = k \frac{\omega_s}{N} = 100 \cdot 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Ili $f_r \div \frac{\pi}{5} = f_s \div 2\pi$ odnosno $f_r = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{f_s}{2\pi} = 100 \text{ Hz}$.

Ili $\omega_r \div \frac{\pi}{5} = \omega_s \div 2\pi$ odnosno $\omega_r = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{\omega_s}{2\pi} = 100 \cdot 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$



DTFT – Discrete Time Fourier Transform

Na sličan način kao i CTFT iz CTFS ili CTFT diskretizacijom i izbacivanja vremenske zavisnosti

$x[n]$ aperiodičan diskretan niz

$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

Spektar je beskonačan i periodičan sa periodom 2π

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(j\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Parsevalova teorema

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$

Energije su jednake
Spektralne komponente samo u osnovnom opsegu

Veza sa realnim svetom ista kao kod DTFS



Z transformacija

$x[n]$ diskretan niz

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

$h[n]$ diskretan niz dobijen diskretizacijom impulsnog odziva sistema
Z transformacija – funkcija prenosa sistema u z domenu

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$$

Uočiti

$$z = e^{\Gamma + j\Omega} = e^{\Gamma} e^{j\Omega} = r e^{j\Omega}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x[n]e^{-\Gamma n})e^{-j\Omega n} \xrightarrow{r=1} X(j\Omega) \quad \text{DTFT}$$

Česta notacija kada se radi sa diskretnim nizovima i z transformacijom

$$X(z) = X(e^{j\Omega}) \rightarrow X(j\Omega)$$

Ravnopravno ćemo ih koristiti. $X(e^{j\Omega})$ kada budemo radili sa z transformacijama.



Veze između transformacija



Veza CTFT i CTFS

$$X_{\text{CTFT}}(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_{\text{CTFS}}[jk\omega_p] \delta(\omega - k\omega_p)$$

Veza DTFS i CTFS

$$X_{\text{DTFS}}[jk\Omega_p] = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_{\text{CTFS}}[j(k\omega_p - n\omega_s)]$$

Veza DTFT i CTFT

$$X_{\text{DTFT}}(j\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_{\text{CTFT}}(j(\omega - n\omega_s))$$

Veza DTFT i DTFS

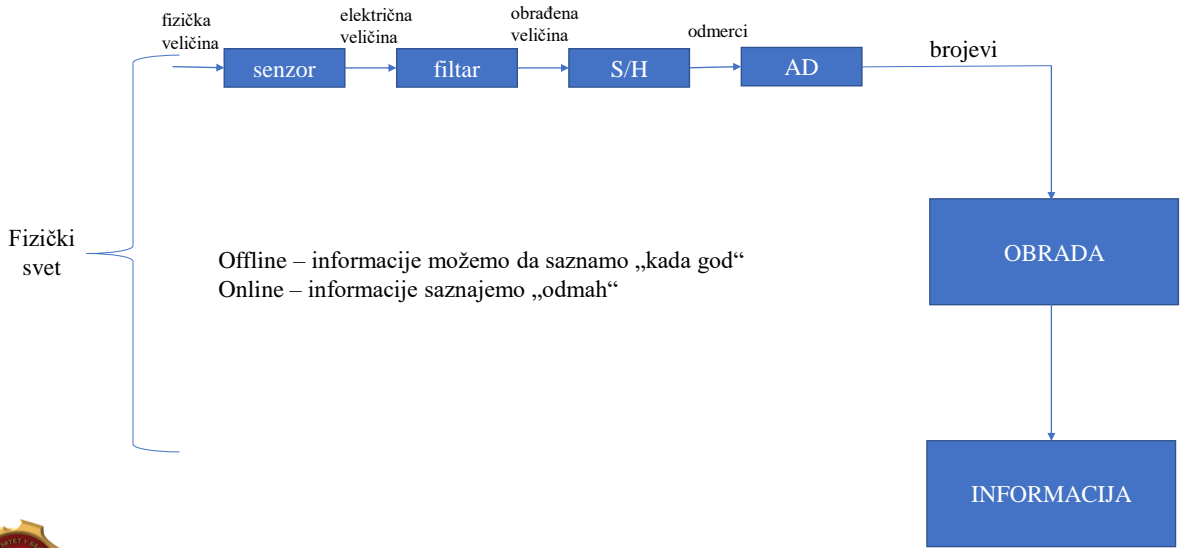
$$X_{\text{DTFT}}(j\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_{\text{DTFS}}[jk\Omega_p] \delta(\Omega - k\Omega_p)$$



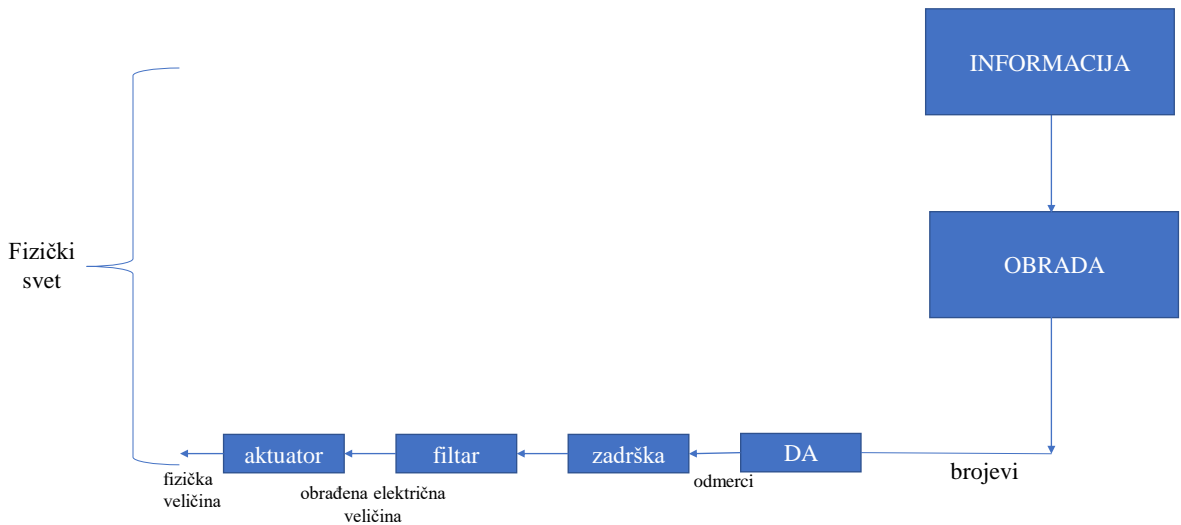
Sistem za digitalnu obradu signala



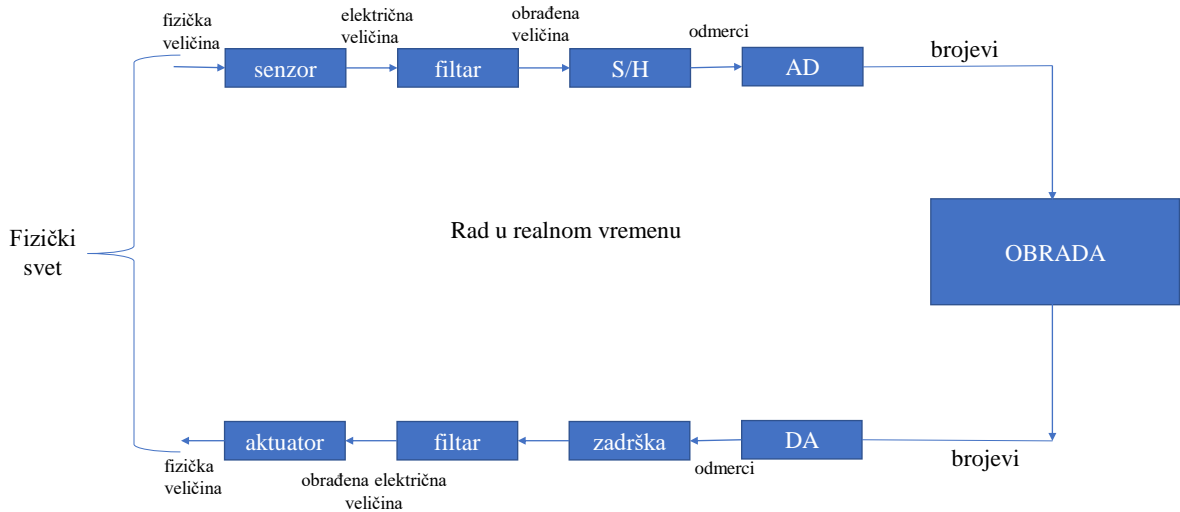
Kako izgleda realan sistem za digitalnu analizu signala



Kako izgleda realan sistem za digitalnu sintezu signala



Kako izgleda kompletan realan sistem za digitalnu obradu signala



Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

Digitalna obrada signala - 2022/23

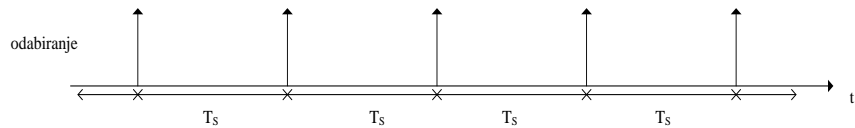
115

115

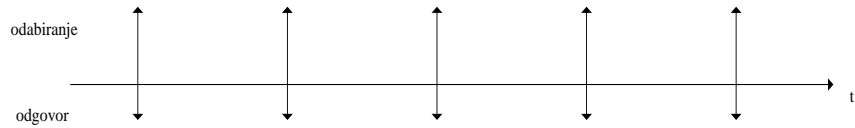
RAD U REALNOM VREMENU – Potreba za „efikasnim“ računanjem

„Odgovor“ najkasnije u definisanom vremenskom intervalu.

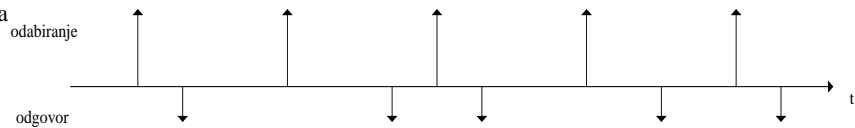
Idealno
Vreme za proračun nula



Realno - posle svakog odmerka
Vreme za proračun $< T_s$



Realno – posle n odmeraka
Vreme za proračun
po odmerku $< T_s$



Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

Digitalna obrada signala - 2022/23

116

116

Cilj

Što efikasnije, tačnije, brže, ... dobiti, obraditi, proslediti informacije.

Efikasnije – sa što manje računarskih resursa.

Tačnije – nema idelnih filtara, diskretizacija po amplitudi, šum,

Brže – da zadovoljimo uslove realnog vremena



Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

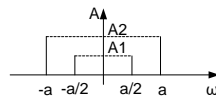
Digitalna obrada signala - 2022/23

117

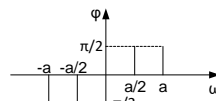
117

Primeri zadataka na ispitu

Zadatak 1 (20 poena)



Slika 1.a



Slika 1.b

Pretpostavljena amplitudska i fazna karakteristika spektra fizičkog signala iz kojeg je potrebno dobiti informacije prikazane su na slikama 1a i 1b respektivno. Informacija se dobija iz vrednosti amplituda. Potrebno je projektovati sistem za digitalnu obradu signala koji na osnovu informacija iz fizičkog signala generiše izlazni signal po nekom algoritmu. Usled nesavršenosti, senzor fizičkog signala unosi harmonijske komponente i na učestanostima većim od a . Izlazni signal ne sme da sadrži harmonijske komponente više od $2a$.

- [5] Nacrtajte šemu potrebnog sistema za digitalnu obradu signala i ukratko objasnite ulogu svakog bloka na šemi.
- [2] Odrediti minimalnu učestanost odabiranja koja je potrebna da bi se dobila kompletna informacija o ulaznom signalu.
- [5] Izračunajte signale $y_1[n]$ i $y_2[n]$ koji se dobijaju ako se ulazni signal $x(t)$ odabira učestanošću $\omega_1 = 2a$ odnosno $\omega_2 = 4a$.
- [3] Nacrtajte spektar signala $y[n]$ koji se dobija ako se ulazni signal $x(t)$ odabira učestanošću $3a/2$.
- [5] Koliko je najmanje potrebno uzeti tačaka za računanje DFTa ako je učestanost odabiranja $83a/7$ da ne bi došlo do curenja spektra?



Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

Digitalna obrada signala - 2022/23

118

118

a) Slajd 114.

b) $\omega_s > 2a$. Nije $\omega_s \geq 2a$ pošto postoji harmonijska komponenta na a .

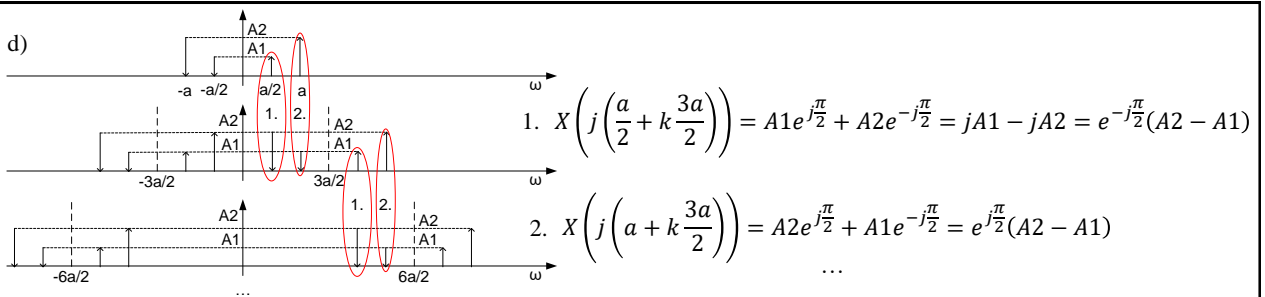
$$c) \quad x(t) = A1 \frac{e^{j(\frac{a}{2}t + \frac{\pi}{2})} + e^{-j(\frac{a}{2}t + \frac{\pi}{2})}}{2} + A2 \frac{e^{j(at + \frac{\pi}{2})} + e^{-j(at + \frac{\pi}{2})}}{2}$$

$$y_1[n] = A1 \frac{e^{j(\frac{a}{2}n\frac{2\pi}{2a} + \frac{\pi}{2})} + e^{-j(\frac{a}{2}n\frac{2\pi}{2a} + \frac{\pi}{2})}}{2} + A2 \frac{e^{j(an\frac{2\pi}{2a} + \frac{\pi}{2})} + e^{-j(an\frac{2\pi}{2a} + \frac{\pi}{2})}}{2}$$

$$= A1 \frac{e^{j(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2})} + e^{-j(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2})}}{2} + A2 \frac{e^{j(n\pi + \frac{\pi}{2})} + e^{-j(n\pi + \frac{\pi}{2})}}{2} = A1 \cos\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{Preklapanje spektara}$$

$$y_2[n] = A1 \frac{e^{j(\frac{a}{2}n\frac{2\pi}{4a} + \frac{\pi}{2})} + e^{-j(\frac{a}{2}n\frac{2\pi}{4a} + \frac{\pi}{2})}}{2} + A2 \frac{e^{j(an\frac{2\pi}{4a} + \frac{\pi}{2})} + e^{-j(an\frac{2\pi}{4a} + \frac{\pi}{2})}}{2}$$

$$= A1 \frac{e^{j(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{2})} + e^{-j(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{2})}}{2} + A2 \frac{e^{j(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2})} + e^{-j(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2})}}{2} = A1 \cos\left((n+2)\frac{\pi}{4}\right) + A2 \cos\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$



e) Učićemo DFT. Suština je, da ne bi bilo curenje spektra, odabiranje mora da bude koherentno.

$$\frac{\omega_s}{\omega} = \frac{N}{p} \qquad \frac{83a}{\frac{a}{2}} = \frac{166}{7} \qquad \frac{83a}{\frac{a}{7}} = \frac{83}{7}$$

N tačaka u p perioda
Uzajamno prosti
 $N > 2$

$N=166$ tačaka u $p=7$ perioda
signala čiji je period $\frac{2\pi}{a} = \frac{4\pi}{a}$

$N=83$ tačke u $p=7$ perioda
signala čiji je period $\frac{2\pi}{a}$

$N=166$
Zadovoljena oba uslova



Zadatak 1 (20 poena)

Dat je signal:

$$x(t) = \cos(2\pi \cdot 1000 \text{ Hz} \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 1240 \text{ Hz} \cdot t) + \sin(2\pi \cdot 1300 \text{ Hz} \cdot t).$$

Signal se odabira učestanošću odabiranja $f_s = 11250$ Hz. Potrebno je uraditi frekvencijsku analizu signala $x(t)$ korišćenjem diskretne Furijeove transformacije.

a) [3] Napišite izraz za diskretan signal $x[n]$, dobijen diskretizacijom signala $x(t)$ u N tačaka.

b) [7] Odredite minimalan broj odbiraka N_{min} digitalnog signala $x[n]$ za koji prilikom izračunavanja diskretne Furijeove transformacije ne dolazi do curenja spektra.

c) [5] Skicirajte diskretnu Furijeovu transformaciju signala $x[n]$ izračunatu u N_{min} tačaka.

d) [5] Skicirajte diskretnu Furijeovu transformaciju signala $x_{cb}[n]$ koji je dobijen tako što je iz signala $x[n]$ uzet svaki deveti odbirak.

Crveno – učićemo, ali ako je koherentno odmeravanje znali bi i sada.

Samo spektralne linije na 1000Hz, 1240Hz, 1300Hz i replike na učestanosti odabiranja.

U tački d će se uneti „nešto“ što ćemo zvati curenje spektra.



a)
$$x[n] = \cos\left(2\pi \cdot \frac{1000}{11250} n\right) + \cos\left(2\pi \cdot \frac{1240}{11250} n\right) + \sin\left(2\pi \cdot \frac{1300}{11250} n\right) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

b) Odabiranje koherentno
$$\frac{f_s}{f} = \frac{N}{p}$$

$$\frac{11250}{1000} = \frac{1125}{100} = \frac{225}{20} = \frac{45}{4}$$

$$\frac{11250}{1240} = \frac{1125}{124}$$

$$N = 1125$$

Zadovoljava sve uslove

$$\frac{11250}{1300} = \frac{1125}{130} = \frac{225}{26}$$

Uslov – sve učestanosti u punom broju perioda - isto vreme

p – celi brojevi
$$\frac{p_1}{1000} = \frac{p_2}{1240} = \frac{p_3}{1300} = \frac{p_s}{11250}$$

$$\text{NZD}(1000, 1240, 1300, 11250) = 10$$

$$\frac{100}{1000} = \frac{124}{1240} = \frac{130}{1300} = \frac{1125}{11250}$$

$N=1125$ tačaka biće odabrano
u tačno 100 perioda signala učestanosti 1000 Hz
u tačno 124 periode signala učestanosti 1240 Hz

...



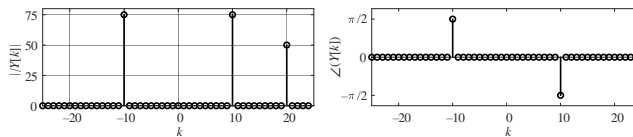
Zadatak 1 (25 poena)

Dat je signal:

$$x(t) = \cos(2\pi \cdot 1000 \text{ Hz} \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 1240 \text{ Hz} \cdot t) + \sin(2\pi \cdot 1300 \text{ Hz} \cdot t).$$

Signal se odabira učestanošću odabiranja $f_s = 10800 \text{ Hz}$. Potrebno je uraditi frekventijsku analizu signala $x(t)$ korišćenjem diskretne Furijeove transformacije.

- [3] Napišite izraz za diskretan signal $x[n]$, dobijen diskretizacijom signala $x(t)$ u N tačaka.
- [7] Odredite minimalan broj odbiraka N_{\min} digitalnog signala $x[n]$ za koji prilikom izračunavanja diskretne Furijeove transformacije ne dolazi do curenja spektra.
- [5] Skicirajte diskretnu Furijeovu transformaciju signala $x[n]$ izračunatu u N_{\min} tačaka.
- [5] Skicirajte diskretnu Furijeovu transformaciju signala $x_{90}[n]$ koji je dobijen tako što je iz signala $x[n]$ uzet svaki deveti odbirak.
- [5] Odredite analitički oblik signala $y[n]$ čija je diskretna Furijeova transformacija prikazana na slici 1.

Slika 1 – Amplitudska i fazna karakteristika signala $y[n]$ 

Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

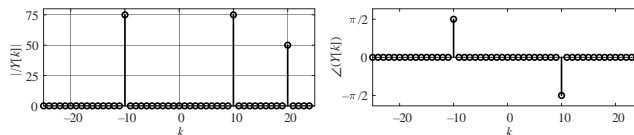
Digitalna obrada signala - 2022/23

123

123

a, b, c, i d isto kao u prethodnom zadatku

e) Samo treba da prepoznate da nije u pitanju realan signal. Analitički je. Kompleksan.



Da zaboravimo DFT. Neka je ovo spektar DTFS prikazan u opsegu $-\pi$ do π .

$$y[n] = \sum_{k=-l}^l Y[k] e^{jk\Omega_0 n}$$

$$y[n] = 75e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j10\Omega_0 n} + 75e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j10\Omega_0 n} + 50 \cdot e^{j20\Omega_0 n}$$

$$y[n] = 75 \cdot 2 \cdot \cos\left(10\Omega_0 n - \frac{\pi}{2}\right) + 50 \cdot \cos(20\Omega_0 n) + 50j \cdot \sin(20\Omega_0 n)$$

$$y[n] = 75 \cdot 2 \cdot \cos\left(10\Omega_0 n - \frac{\pi}{2}\right) + 50 \cdot \cos(20\Omega_0 n) + 50j \cdot \sin(20\Omega_0 n)$$



Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

Digitalna obrada signala - 2022/23

124

124

Zadatak 1 (25 poena)

Dat je signal:

$$x(t) = \cos(2\pi \cdot 150 \text{ Hz} \cdot t).$$

- a) [5] Napišite izraz za diskretan signal $x[n]$, dobijen diskretizacijom signala $x(t)$ periodičnom povorkom delta impulsa sa učestanošću $f_s = 200$ Hz.
- b) [5] Napišite izraz za signal $x_r(t)$, dobijen idealnim kolima za rekonstrukciju od signala $x[n]$. Da li se dobija isti signal kao $x(t)$? Obrazložite zašto.
- c) [5] Nacrtajte šemu koja realizuje *radix-2* algoritam za izračunavanje DFT-a u 4 tačke korišćenjem preuređivanja u vremenskom domenu.
- d) [5] Korišćenjem šeme iz tačke c) izračunajte $Y[k]$, DFT sekvence $x[n]$ pomnožene pravougaonom prozorskom funkcijom dužine 4. Na šemi naznačite odgovarajuće međurezultate.
- e) [5] Korišćenjem bloka iz tačke c) i dovoljnog broja oduzimača kao dodatnih blokova, nacrtajte šemu kojom se izračunava IDFT u 4 tačke.



125

a) $x(t) = \cos(2\pi \cdot 150 \text{ Hz} \cdot t)$
 $f_s = 200 \text{ Hz} \quad T_s = \frac{1}{f_s} \quad x[n] = \cos(2\pi \cdot 150 \text{ Hz} \cdot nT_s) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} n\right) = [1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots]$

b) $x[n]$ periodičan diskretan niz sa periodom 4 i $\Omega_p = \frac{2\pi}{4} \Rightarrow \omega_p = \frac{\omega_s}{4} \Rightarrow f_p = \frac{f_s}{4} = 50 \text{ Hz}$

$$X[0] = \frac{1}{4}(1 + 0 + (-1) + 0) = 0$$

$$X[k] = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j\frac{2\pi}{2}nk} \quad X[1] = \frac{1}{4}(1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 0 \cdot 1} + (-1) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2 \cdot 1}) = \frac{1}{2} = X[-1]$$

$$X[2] = \frac{1}{4}(1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 0 \cdot 2} + (-1) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2 \cdot 2}) = 0 = X[-2]$$

$$X[3] = \frac{1}{4}(1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 0 \cdot 3} + (-1) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2 \cdot 3}) = \frac{1}{2} = X[-3]$$

Idealni filter – restauracija samo osnovni opseg

$$x_r(t) = \sum_{k=-1}^{+1} X[jk\omega_p] e^{jk\omega_p t} = \frac{1}{2} e^{j(-1)\omega_p t} + \frac{1}{2} e^{j(+1)\omega_p t} = \cos(\omega_p t) = \cos(2\pi f_p t) = \cos(2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t)$$

 $\neq x(t)$

Nije zadovoljena teorema odabiranja



126